Annales du CAPES interne de Mathématiques de 2002 à 2008

+ 2 problèmes supplémentaires = 9 problèmes corrigés

Dany-Jack Mercier

Table des matières

Avant-propos **5**

1 Année 2002 **7**
1.1 Énoncé 7
1.2 Corrigé 14

2 Année 2003 **35**
2.1 Énoncé 35
2.2 Corrigé 43

3 Année 2004 **63**
3.1 Énoncé 63
3.2 Corrigé 74

4 Année 2005 **105**
4.1 Énoncé 105
4.2 Solution 111
4.3 Compléments sur Archimède 130

5 Année 2006 **133**
5.1 Énoncé 133
5.2 Corrigé 141

6 Année 2007 **163**
6.1 Énoncé 163
6.2 Corrigé 170

7 Année 2008 **189**
7.1 Énoncé 189
7.2 Corrigé 198

8 Bonus : 2 problèmes **215**
8.1 Inspecteur des impôts 2006 215
8.1.1 Enoncé 215
8.1.2 Solution 217
8.2 CAPLP Maths-Sciences Physiques 2006 230
8.2.1 Enoncé 230
8.2.2 Solution 236

© 2023 Dany-Jack Mercier & Jean-Etienne Rombaldi.
Tous droits réservés.

Avant-propos

Ce livre rassemble 7 problèmes proposés au CAPES interne de mathématiques de l'année 2002 à l'année 2008, et deux épreuves de concours proches, présentés avec un corrigé que j'ai voulu détailler[1].

Utiliser des annales pour préparer un concours permet de s'entraîner en étant certain de rester dans le sujet, de réviser et/ou apprendre des notions utiles faisant partie du programme.

S'il est toujours conseillé d'entrer dans le problème avec coeur et entrain, et de répondre aux questions en utilisant un brouillon et en rédigeant sa solution, il est bon de ne pas perdre de vue que l'objectif principal est de "faire des progrès", d'apprendre, et de ne pas gaspiller une minute du temps dont on dispose, sauf si on le décide consciemment.

Aussi je conseillerai :

▶ D'utiliser le matériel (stylos, crayons, gommes, calculatrice...) dont on disposera le jour du concours.

▶ D'utiliser deux types de brouillon :

a) D'abord un *brouillon standard* sur lequel on se donne volontairement *le droit de tout écrire pour faciliter son travail de recherche*, sans se sentir obligé d'aller obligatoirement jusqu'à une rédaction précise de la réponse, donc en s'arrêtant dès qu'on a trouvé une issue et qu'on est capable de passer au propre pour rédiger à partir des seules traces écrites dont on dispose.
Il ne s'agit pas de rédiger complètement au brouillon pour ensuite perdre du temps à recopier la solution au propre. Il faut au contraire s'entraîner à rédiger *directement* au propre dès qu'on s'aperçoit qu'on est capable de le faire[2].

[0] cmonannalescapesinterne2002a08 v1.10

[1] Sur mon site MégaMaths, je propose des annales corrigées plus anciennes du CAPES interne sur lesquelles on peut s'entraîner. Pour y aller, c'est simple : il suffit de taper "megamaths" dans tout bon moteur de recherche...

[2] Avec un taux de réussite suffisant ! Celui-ci me semble convenable s'il permet d'obtenir plus de 80% des points réservés à la question traitée. On fait évidemment son possible pour

b) Ensuite un *brouillon voltigeur* permettant de faire des tests d'écriture quand on rédige directement au propre.
Au propre, on écrit le numéro complet de la question puis on commence à rédiger. Si on hésite ou si on peut seulement imaginer le début d'une phrase sans savoir si on pourra la terminer convenablement en expliquant ce qu'on a envie d'expliquer, on place son brouillon voltigeur sur la copie en cours de rédaction et on y écrit le début de la phrase.
On effectue ainsi un *test d'écriture au brouillon*. On recopie ensuite directement la phrase au propre dès qu'on est certain qu'elle peut convenir.

▶ De lire la solution proposée dès qu'on en a assez, ou qu'on s'aperçoit qu'on perd trop de temps. Le but est alors de comprendre la solution, ce qui n'est pas rien.

▶ De s'autoriser, à certains moments, à rechercher les questions uniquement au brouillon, sans faire cas de la rédaction, et en lisant la solution proposée pour avancer, vérifier ou comparer des méthodes.

▶ De s'astreindre à rédiger complètement les solutions de quelques questions, de temps en temps, pour être sûr de savoir comment passer facilement du brouillon à une solution rédigée, présentée et structurée. En tout état de cause, c'est ce produit fini qui sera le seul témoin de son travail après la fin de l'épreuve, qui sera corrigé et qui donnera des points, pas le brouillon !

Amusons-nous autant que nous pouvons avec ces problèmes et conservons un moral d'enfer pour aller plus loin...

Bon courage à toutes et à tous !

Pointe-à-Pitre, le 3 mars 2008
Dany-Jack Mercier

---

gagner tous les points donnés à la question, mais ce ne sera jamais au détriment des autres questions et sans ce poser la question fatidique : n'ai-je pas intérêt à gagner seulement une partie des points réservés à cette question pour dégager plus de temps et me permettre d'aborder, et de résoudre, beaucoup d'autres questions ?

Chapitre 1

Année 2002

1.1 Énoncé

PREMIER PROBLÈME : ÉTUDE DU COMPORTEMENT DUNE SUITE EN FONCTION DE SA VALEUR INITIALE

On considère un nombre réel a et on définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{n+2} \text{ pour } n \geq 0. \end{cases}$$

Le but de l'exercice est d'étudier, pour différentes valeurs de a, le comportement de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

1. Etude d'un premier cas particulier.

Dans cette question, on suppose que $a = 1/2$.

1.1. Calculer la valeur exacte de u_1 et u_2.

1.2. Donner, pour chacun des nombres u_1 et u_2 un encadrement d'amplitude 10^{-2} à bornes décimales.

1.3. Montrer que, pour tout n entier naturel, on a $0 < u_n \leq 1$.

1.4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

2. Etude d'un second cas particulier.

Dans cette question, on suppose que $a = 2$.

2.1. Calculer la valeur réelle exacte, puis donner une valeur approchée décimale à 10^{-2} près de u_1, u_2 et u_3.

2.2. On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = e^x - (x+1)(x+2).$$

2.2.1. Étudier le signe de f''.

2.2.2. Montrer que f' est strictement positive sur l'intervalle $[2, +\infty[$.

2.2.3. Déduire de ce qui précède que f est strictement positive sur l'intervalle $[3, +\infty[$.

2.3. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a $u_n \geq n$.

2.4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ diverge vers $+\infty$.

3. Etude du cas général.

On revient au cas général où a est un nombre réel quelconque. On désigne par E_a l'ensemble des indices $n > 0$ tels que u_n est strictement inférieur à 1 :

$$E_a = \{n \in \mathbb{N}^* \,/\, u_n < 1\}\,.$$

3.1. Déterminer $E_{1/2}$ et E_2.

3.2. Démontrer que, si E_a n'est pas vide, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

3.3. Démontrer que, si E_a est vide, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq \ln(n+2)$$

et en déduire, dans ce cas, que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ diverge vers $+\infty$.

4. Détermination d'une partition de $\mathbb{R}$ en fonction du comportement de la suite.

On désigne par A_0 l'ensemble des réels a tels que E_a n'est pas vide et par A_∞ celui des réels a tels que E_a est vide.

4.1. Montrer que A_0 et A_∞ sont deux intervalles complémentaires de $\mathbb{R}$.

4.2. Montrer qu'il existe un nombre réel $m > 0$ tel que :

$$]-\infty, m[\subset A_0 \subset]-\infty, m] \text{ et }]m, +\infty[\subset A_\infty \subset [m, +\infty[.$$

4.3. En déduire un algorithme permettant de trouver une valeur approchée de m à 10^{-2} près.

4.4. A l'aide d'une calculatrice, déterminer une valeur approchée de m à 10^{-2} près.

4.5. Déterminer auquel des deux intervalles A_0 ou A_∞ appartient le nombre réel m.

SECOND PROBLEME : GÉOMÉTRIE DANS LE PLAN COMPLEXE

Ce problème comporte deux parties. La partie I permet de retrouver des résultats classiques de géométrie du triangle ; la partie II aborde des questions relatives à la droite. Ces deux parties sont indépendantes l'une de l'autre, à l'exception de la question II.5. qui utilise des résultats de la partie I.

Dans tout le problème, on se place dans le plan affine euclidien. On rappelle que, dans un triangle, le pied de la hauteur passant par un sommet est l'intersection de cette hauteur avec le côté opposé à ce sommet. D'autre part, z étant un nombre complexe, on désigne par $\overline{z}$ son conjugué et par $|z|$ son module.

Partie I

I.0. Question préliminaire.

Définition 1. On appelle quadrangle toute figure du plan formée par six droites joignant deux à deux quatre points du plan non alignés trois à trois.

La figure 1.1 représente le quadrangle $(MNPQ)$. Les points M, N, P, Q sont les sommets de ce quadrangle et les segments $[MN]$, $[NP]$, $[PQ]$, $[QM]$, $[PM]$, $[QN]$ en sont les côtés.

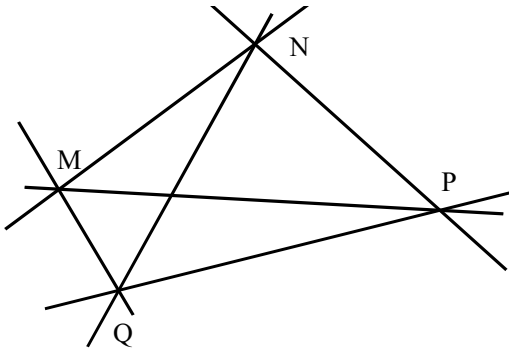


FIG. 1.1 – Quadrangle $(MNPQ)$

Définition 2. On dit qu'un quadrangle est orthocentrique si, et seulement si, chacun de ses sommets est l'orthocentre du triangle formé par les trois autres sommets.

I.0.1. Démontrer qu'un quadrangle $(MNPQ)$ est orthocentrique si, et seulement si, le point M est l'orthocentre du triangle NPQ.

On se place désormais dans le plan complexe rapporté au repère cartésien orthonormal direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, et on appelle Γ le cercle de centre O et de rayon 1. Soient A, B, C trois points distincts de Γ tels que le triangle ABC ne soit pas rectangle. On note a, b, c les affixes respectives des points A, B, C. Le point M d'affixe m sera parfois noté $M(m)$.

I.0.2. Tracer une figure soignée représentant l'ensemble des situations étudiées dans la partie I. On complétera cette figure au fur et à mesure des questions qui seront traitées.

I.1. Construction d'un quadrangle orthocentrique.

I.1.1. Soit C' l'image du point O dans la symétrie orthogonale par rapport à la droite (AB). Démontrer que C' est distinct de O, puis déterminer la nature du quadrilatère $AOBC'$. Démontrer que l'affixe de C' est $a+b$.

I.1.2. On considère le point D tel que $OC'DC$ soit un parallélogramme (éventuellement aplati).

a. A quelle condition portant sur le triangle ABC les points O, C', D, C sont-ils alignés ?

b. Démontrer que (CD) est une hauteur du triangle ABC.

I.1.3. Démontrer que l'affixe d du point D est $d = a+b+c$. En déduire que (AD) et (BD) sont des hauteurs du triangle ABC.

I.1.4. Démontrer que le quadrangle $(ABCD)$ est orthocentrique.

I.2 Le cercle et la droite d'Euler d'un triangle.

I.2.1. On considère le milieu commun C_1 des segments $[AB]$ et $[OC']$, le milieu commun Ω des segments $[OD]$ et $[CC']$ et, enfin, le milieu C_2 du segment $[CD]$. Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{C_1\Omega}$ et $\overrightarrow{\Omega C_2}$.

I.2.2. En déduire que le cercle de rayon $\frac{1}{2}$ centré en Ω passe par les milieux respectifs A_1, B_1, C_1 des côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ du triangle ABC, par les milieux respectifs A_2, B_2, C_2 des segments $[AD]$, $[BD]$, $[CD]$ et par les points A_3, B_3, C_3, pieds des hauteurs du triangle ABC passant respectivement par A, B, C.

Le cercle précédent est appelé cercle d'Euler du triangle ABC.

I.2.3. Montrer que l'homothétie h de centre D et de rapport 2 transforme le cercle d'Euler du triangle ABC en le cercle circonscrit au triangle ABC.

I.2.4. A l'aide de ce qui précède, donner une démonstration du théorème suivant :

Théorème 1. Étant donné un quadrangle orthocentrique $(ABCD)$, les quatre triangles déterminés par ses sommets pris trois à trois ont le même cercle d'Euler. Celui-ci passe par neuf points : les six milieux des côtés du quadrangle et les pieds des hauteurs des triangles.

I.2.5. Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Calculer l'affixe de G ; en déduire que les points O, Ω, D et G sont alignés. Lorsque le triangle ABC n'est pas équilatéral, la droite passant par les quatre points précédents est appelée droite d'Euler du triangle ABC. Préciser la position des points Ω et G sur le segment $[OD]$. Que se passe-t-il si le triangle ABC est équilatéral ?

I.3. Cercle d'Euler associé à un quadrangle orthocentrique.

On ajoute aux points A, B, C, D, C' introduits précédemment le point $A'(b+c)$ et le point $B'(c+a)$.

I.3.1. Démontrer que le cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$ est centré en D et de rayon 1 et que le quadrangle $(A'B'C'O)$ est orthocentrique (on pourra, en le justifiant, utiliser le fait que le triangle $A'B'C'$ est l'image de ABC par une isométrie que l'on précisera).

I.3.2. Compléter l'énoncé suivant :

Théorème 2. Soit un quadrangle orthocentrique $(ABCD)$. [...]. Les huit triangles [...] ont le même cercle d'Euler ; ce cercle passe par les douze points [...] rattachés au quadrangle.

I.3.3. On s'intéresse maintenant aux droites d'Euler.

a. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral si, et seulement si, on a $a+b+c=0$.

b. Dans le cas où le triangle ABC n'est pas équilatéral, que peut-on dire des droites d'Euler des triangles ABC et $A'B'C'$?

I.4. Un peu d'histoire des mathématiques.

Comme on le sait, l'oeuvre de Leonhard Euler (1707-1783) est colossale et touche à tous les champs des mathématiques ; mais Euler est plus connu pour ses travaux en analyse qu'en géométrie ; ses études dans cette branche étaient souvent prétexte à revenir à l'analyse qu'il affectionnait. Toujours épris d'un profond désir de clarté, il fut amené à préciser nombre de notations encore en vigueur à l'heure actuelle.
Pouvez-vous, parmi vos connaissances personnelles des programmes du secondaire, choisir un point précis (notion mathématique ou notation) qui soit un apport de ce mathématicien et le situer comme tel dans une courte présentation d'une dizaine de lignes accessible à des élèves de lycée ? Le cercle d'Euler et la droite d'Euler ne peuvent être retenus ici.

Partie II

Dans cette partie, le plan complexe est toujours rapporté à un repère cartésien orthonormal direct d'origine O. On désigne toujours par Γ le cercle de centre O et de rayon 1 et on note, comme précédemment a, b, c, d les affixes respectives des points A, B, C, D. On conseille vivement de réaliser plusieurs figures séparées.

II.1. Soient $[AB]$ et $[CD]$ deux cordes parallèles du cercle Γ. Démontrer que les angles orientés de vecteurs $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ et $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB})$ sont égaux. En déduire $ab = cd$.

II.2. Equation complexe d'une droite du plan complexe.

II.2.1. Soit I le milieu d'une corde $[AB]$ du cercle Γ. Soient $Z(z)$ un point, $S(s)$ l'image de Z dans la symétrie orthogonale par rapport à la médiatrice du segment $[AB]$ et $T(t)$ le symétrique du point S par rapport au point I.

a. Lorsque le point Z est différent du point O, montrer que $\frac{s}{|s|}\frac{z}{|z|} = ab$, puis exprimer t en fonction de a, b, z. Le résultat obtenu est-il toujours valable quand Z coïncide avec O ?

b. Démontrer que le point Z appartient à la droite (AB) si et seulement si $Z = T$.

c. En déduire que la relation :

$$(1) \qquad z + ab\overline{z} = a + b$$

caractérise les points de la droite (AB).

d. Soit $[PQ]$ un diamètre de Γ. On note p l'affixe du point P ; démontrer que les points de la droite (PQ) sont caractérisés par $z - p^2\overline{z} = 0$.

II.2.2. Soit Δ une droite quelconque du plan passant par le point $Z_0(z_0)$ et parallèle à (PQ). Montrer que la relation :

$$(2) \qquad z - p^2\overline{z} = z_0 - p^2\overline{z}_0$$

caractérise les points de la droite Δ (on pourra noter que le point $Z(z)$ appartient à la droite Δ si et seulement si son image par la translation de vecteur $\overrightarrow{Z_0O}$ appartient à la droite (PQ)).

On appelle la relation (2) une équation dans le plan complexe de la droite Δ. Le nombre $-p^2$ s'appelle le coefficient directeur complexe de toute droite parallèle à la droite (PQ).

II.2.3. Quel est le coefficient directeur complexe de la droite (AB) définie au **II.2.1.** ?

II.3. Soient $[AB]$ et $[CD]$ deux cordes parallèles du cercle Γ. La droite perpendiculaire à $[AB]$ passant par D recoupe le cercle Γ en $D'(d')$ (les points D et D' peuvent éventuellement être confondus). Démontrer que $d' = -c$, puis que $d' = -ab/d$.

II.4. Droite de Simson.

Soient A, B, C, D quatre points distincts deux à deux du cercle Γ. On note $U(u)$, $V(v)$, $W(w)$ les projetés orthogonaux respectifs du point D sur les droites (AB), (BC), (CA) . On se propose de démontrer que les trois points U, V, W sont alignés.

II.4.1. Démontrer ce résultat lorsque la corde $[CD]$ est un diamètre du cercle Γ.

II.4.2. On se place dans le cas où la corde $[CD]$ n'est pas un diamètre de Γ et n'est pas perpendiculaire à la corde $[AB]$. La perpendiculaire à la droite (AB) passant par D recoupe le cercle Γ en P.

a. Démontrer que les angles orientés de droites $((CA),(CP))$ et $((WA),(WU))$ sont égaux.

b. Déterminer le coefficient directeur complexe de la droite (UW) et en déduire que les trois points U, V, W sont alignés.

II.4.3. Démontrer que les points U, V, W sont encore alignés lorsque la corde $[CD]$ n'est pas un diamètre du cercle Γ et est perpendiculaire à la corde $[AB]$ (on pourra utiliser la tangente τ au cercle Γ au point C). La droite passant par les points U, V, W est appelée la droite de Simson du point D relativement au triangle ABC.

II.5. Cette question utilise des résultats obtenus dans la partie I. On y démontre le :

Théorème 3. Dans un quadrilatère inscrit on considère pour chaque sommet sa droite de Simson relative au triangle formé par les trois autres sommets. Les quatre droites ainsi définies sont concourantes en un point appartenant aux cercles d'Euler des quatre triangles.

Reprenons les hypothèses et les notations de la question **II.4**.

II.5.1. Soit H l'orthocentre du triangle ABC. Quelle est l'affixe de H ?

II.5.2. Déterminer une équation complexe des droites (DU) et (AB). En déduire la valeur de u en fonction de a, b, d.

II.5.3. Montrer alors que la droite de Simson du point D relativement au triangle ABC admet pour équation complexe :

$$(3) \qquad z - \frac{abc}{d}\overline{z} = \frac{1}{2}\left[(a+b+c+d) - \frac{abc}{d}\left(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+\overline{d}\right)\right].$$

II.5.4. Montrer que le point L d'affixe $l = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$ vérifie la conclusion du théorème 3.

1.2 Corrigé

PREMIER PROBLÈME : ÉTUDE DU COMPORTEMENT DUNE SUITE EN FONCTION DE SA VALEUR INITIALE

1.1. $u_1 = \dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}$ et $u_2 = \dfrac{1}{3}e^{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}}$.

1.2. Une calculatrice donne $u_1 \simeq 0,824\,36$ et $u_2 \simeq 0,760\,14$, d'où les encadrements $0,82 \leq u_1 < 0,83$ et $0,76 \leq u_2 < 0,77$.

1.3. On a déjà $u_0 = 1/2 > 0$ et $u_n > 0$ pour tout $n > 0$ puisque u_n est sans cesse le quotient de deux nombres positifs. Vérifions que $u_n < 1$ par récurrence sur n. C'est trivial si $n = 0, 1$ ou 2. Si l'inégalité est vraie au rang n (avec $n \geq 2$), alors

$$u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{n+2} < \frac{e}{n+2} < \frac{3}{n+2}$$

puisque la fonction $\xi(x) := \frac{e^x}{n+2}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (en effet ξ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $\xi'(x) = \xi(x)$ strictement positive) et puisque $e \simeq 2,7 < 3$. Comme

$$\frac{3}{n+2} \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq n$$

on trouve bien $u_{n+1} < \frac{3}{n+2} \leq 1$ soit $u_{n+1} < 1$.

1.4. Puisque $u_n \leq 1$ pour tout n, et puisque $\xi(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{n+2} \leq \frac{e}{n+2}.$$

Il suffit de passer à la limite sur les bornes de cet encadrement pour obtenir $\lim u_{n+1} = 0$ par le Théorème des gendarmes.

2.1.

$$u_1 = \frac{e^2}{2} \; ; \quad u_2 = \frac{e^{\frac{e^2}{2}}}{3} \; ; \quad u_3 = \frac{e^{\frac{e^{\frac{e^2}{2}}}{3}}}{4}$$

et une calculatrice donne

$$u_1 \simeq 3,694 \; ; \quad u_2 \simeq 13,409 \; ; \quad u_3 \simeq 166469,3852.$$

La valeur de u_3 a ici été trouvée avec Maple en tapant :

```
> evalf((1/4)*exp(exp(exp(2)/2)/3));
```

Des valeurs approchées décimales à 10^{-2} près par défaut seront donc

$$u_1 \simeq 3,69 \; ; \quad u_2 \simeq 13,40 \; ; \quad u_3 \simeq 166469,38.$$

2.2.1. On a $f(x) = e^x - x^2 - 3x - 2$ d'où $f'(x) = e^x - 2x - 3$ et $f''(x) = e^x - 2$. Ainsi $f''(x) > 0$ si et seulement si $x > \ln 2$.

2.2.2. La fonction f' sera strictement croissante sur $[\ln 2, +\infty[$ puisque de dérivée strictement positive sur cet inervalle.
On a $\ln 2 \simeq 0,693\,15$ et $f'(2) = e^2 - 7 \simeq 0,39 > 0$, donc f' sera strictement positive sur $[2, +\infty[$.

2.2.3. La question précédente prouve que f est strictement croissante sur $[2, +\infty[$. Comme $f(3) = e^3 - 20 \simeq 0,085 > 0$, on peut affirmer que f est strictement positive sur $[3, +\infty[$.

2.3. On montre que $u_n \geq n$ pour tout $n \geq 0$ par récurrence sur n. C'est vrai si $n = 0$, 1, 2 ou 3. Si $u_n \geq n$ avec $n \geq 3$, montrons que $u_{n+1} \geq n + 1$. La croissance de l'exponentielle donne

$$u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{n+2} \geq \frac{e^n}{n+2}$$

et il suffit de vérifier que $\frac{e^n}{n+2} \geq n + 1$ pour conclure. Cette dernière inégalité s'écrit $f(n) \geq 0$ et nous est donnée par **2.2.3** puisque $n \geq 3$.

2.4. De $u_n \geq n$ et $\lim n = +\infty$ on déduit $\lim u_n = +\infty$.

3.1. Si $a = 1/2$, la question **1.3** montre que $0 < u_n < 1$ pour tout n, donc $E_{1/2} = \mathbb{N}^*$. Si $a = 2$, la question **2.3** montre que $n \leq u_n$ pour tout n, donc $1 < u_n$ pour tout $n \geq 2$. Comme dans ce cas $u_1 \simeq 3,694 > 1$ et $u_2 \simeq 13,409 > 1$, on peut affirmer que $E_2 = \varnothing$.

3.2. Si $E_a \neq \emptyset$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{n_0} < 1$. Un raisonnement identique à celui de la question **1.3** montre que $0 < u_n < 1$ pour tout $n \geq n_0$, de sorte que l'on puisse utiliser le raisonnement de **1.4** et obtenir $\lim u_{n+1} = 0$.

3.3. S'il existait $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n < \ln(n+2)$, alors

$$u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{n+2} < \frac{e^{\ln(n+2)}}{n+2} = 1$$

et $n + 1$ appartiendrait à E_a, ce qui est absurde. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq \ln(n+2).$$

Il suffit de voir que $\lim \ln(n+2) = +\infty$ pour que la minoration ci-dessus entraîne $\lim u_n = +\infty$.

4.1. et **4.2.** proviennent du Lemme suivant :

Lemme S : (1) $\mathbb{R} \backslash A_0 = A_\infty$, i.e. $\{A_0, A_\infty\}$ est une partition de $\mathbb{R}$.

(2) $\forall a \in A_0 \quad c < a \Rightarrow c \in A_0$.

(3) $\forall a \in A_\infty \quad a < c \Rightarrow c \in A_\infty$.

(4) $1/2 \in A_0$ et $2 \in A_\infty$.

(5) $]-\infty, 1/2] \subset A_0$ et $[2, +\infty[\subset A_\infty$.

(6) $\exists m > 0 \quad]-\infty, m[\subset A_0 \subset]-\infty, m]$ et $]m, +\infty[\subset A_\infty \subset [m, +\infty[$.

Preuve du Lemme S : (1) est trivial puisque tout réel a vérifie soit $E_a = \emptyset$, soit $E_a \neq \emptyset$.

(2) : Si $a \in A_0$ et $c < a$, notons (v_n) et (u_n) les suites définies par les relations $v_{n+1} = \frac{e^{v_n}}{n+2}$ et $u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{n+2}$, et par les conditions initiales $v_0 = c$ et $u_0 = a$. On a $v_0 < u_0$, et $v_n < u_n$ entraîne $v_{n+1} = \frac{e^{v_n}}{n+2} < u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{n+2}$, ce qui permet d'obtenir $v_n < u_n$ pour tout n par récurrence. Par hypothèse $a \in A_0$ donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_n < 1$. Cela entraîne $v_n < 1$ et $c \in A_0$.

(3) : Même méthode qu'au (2).

(4) : Provient de **3.1**.

(5) : Simple conséquence de (2), (3) et (4).

(6) : L'ensemble A_0 n'est pas vide (car $1/2 \in A_0$) et majoré par 2 (car $[2, +\infty[\subset A_\infty = \mathbb{R} \backslash A_0$) donc admet une borne supérieure m dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A_0 \quad m - \varepsilon < a \leq m.$$

Dans ce cas (2) entraîne $]-\infty, m-\varepsilon] \subset A_0$, et l'on obtient

$$]-\infty, m[= \bigcup_{\varepsilon > 0}]-\infty, m-\varepsilon] \subset A_0.$$

On obtiendrait de la même façon $A_\infty \subset]m, +\infty[$, d'où (6) suivant que m appartiennent à A_0 ou à A_∞. ■

4.3. On peut procéder par dichotomie : on part de $1/2 \in A_0$ et de $2 \in A_\infty$. Puis on calcule le milieu $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 2\right) = \frac{5}{4}$ et l'on détermine si $5/4$ appartient à A_0 ou à A_∞. Si $5/4 \in A_0$, on prend le milieu de $5/4$ et 2 et l'on recommence. Si $5/4 \in A_\infty$, on prend le milieu de $1/2$ et $5/4$ et l'on recommence...

Remarques importantes : 1) Dans cet algorithme, la grande difficulté est de déterminer si un nombre a appartient à A_0 ou à A_∞. Rappelons que, par définition,

$$A_0 = \{a \in \mathbb{R} \,/\, E_a \neq \emptyset\} \quad \text{et} \quad A_\infty = \{a \in \mathbb{R} \,/\, E_a = \emptyset\},$$

puis que

$$(a \in A_0 \Rightarrow \lim u_n = 0) \quad \text{et} \quad (a \in A_\infty \Rightarrow \lim u_n = +\infty).$$

Ces deux dernières implications nous offrent une caractérisation de l'appartenance à ces ensembles : $a \in A_0$ si et seulement si $\lim u_n = 0$, et $a \in A_\infty$ si et seulement si $\lim u_n = +\infty$. Le recours à une calculatrice permettra donc d'avoir "rapidement" une idée de l'appartenance d'un réel a à A_0 ou à A_∞, sans fournir pour autant une preuve rigoureuse du phénomène.

2) La question 3.2 montre que s'il existe n tel que $u_n < 1$, alors $a \in A_0$. Il est donc facile de savoir si a appartient à A_0 : on calcule des valeurs successives de la suite (u_n) et l'on s'arrête dès que l'une de ces valeurs devient inférieure à 1.

3) Si $a \in A_\infty$, la suite (u_n) tendra vers $+\infty$ et l'on ne pourra pas trouver d'indices m tel que $u_m < 1$. Les calculs sur machine donneront une suite qui convergera plus ou moins vite vers $+\infty$ et occasionnera un "overflow" à partir d'un certain rang. Malheureusement, un tel calcul sur machine ne présume en rien de ce que fera la suite "au voisinage de l'infini". Pour prouver que a appartient à A_∞, nous utiliserons le Lemme suivant inspiré de la question **2** :

Lemme T : S'il existe un indice $m \geq 3$ pour lequel $u_m \geq m$, alors $a \in A_\infty$.

Preuve du Lemme T : On vérifie par récurrence que $u_n \geq n$ pour tout $n \geq m$. La propriété est triviale au rang m. Si $u_n \geq n$ avec $n \geq m \geq 3$, montrons que $u_{n+1} \geq n+1$. On a (comme dans la réponse à la question **2.3**)

$$u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{n+2} \geq \frac{e^n}{n+2}$$

de sorte qu'il suffise de vérifier que $\frac{e^n}{n+2} \geq n+1$ pour conclure. Cette dernière inégalité s'écrit $f(n) \geq 0$ et elle est assurée par **2.2.3** puisque $n \geq 3$. ■

Ce critère d'appartenance à A_∞ est efficace : le calcul sur machine de m tel que $u_m \geq m$ ne pose aucun problème pratique puisque u_n tend vers l'infini au moins comme une exponentielle dès que l'on sait que a appartient à A_∞. La question suivante utilisera ce critère.

4.4. • Le programme suivant calcule les premiers termes de la suite (u_n) de premier terme a. Il a été écrit pour MuPad.

```
a :=13/8 : u :=a :
for k from 1 to 10 do
u :=exp(u)/(k+1) :
print(Unquoted,"k= ".expr2text(k)." ",float(u)) ;
end_for
```

• $5/4$ donne naissance à la suite (u_n) telle que $u_0 = 5/4$, $u_1 \simeq 1,7$, $u_2 \simeq 1,9$, $u_3 \simeq 1,6$, $u_3 \simeq 1,3$, $u_3 \simeq 0,964 < 1$, donc $5/4 \in A_0$.

• Le milieu de 5/4 et 2 est $13/8 = 1,625$. Si $a = 13/8$, le programme donne

k= 1 , 2.539209519
k= 2 , 4.223217296
k= 3 , 17.06318015
k= 4 , 5146061.591
k= 5 , 2.366717761e2234905
Error : Overflow/underflow in arithmetical operation ; during evaluation of 'exp : :float'

Ainsi $u_3 \geq 3$ et $13/8 \simeq 1,625 \in A_\infty$ d'après le Lemme **T**..

• Le milieu de 5/4 et 13/8 est 23/16. Les premiers termes de la suite (u_n) associée à 23/16 sont

k= 1 , 2.105078628
k= 2 , 2.735916115
k= 3 , 3.855966749

Donc $u_3 \geq 3$ et $23/16 \simeq 1,437 \in A_\infty$.

• Le milieu de 5/4 et 23/16 est 43/32. Les premiers termes de la suite (u_n) associée à 43/32 sont

k= 1 , 1.916695902
k= 2 , 2.266152849
k= 3 , 2.41055856
k= 4 , 2.228036373
k= 5 , 1.546937089
k= 6 , 0.6710087778
k= 7 , 0.2445262133

Donc $u_6 < 1$ et $43/32 \simeq 1,343 \in A_0$.

Remarque : Les termes u_2, u_3 et u_4 ci-dessus sont supérieurs à 2. Bien que 2 appartienne à A_∞, on ne peut pas conclure à l'appartenance de 43/32 à A_∞ (comme on serait tenté de le faire !). En fait, on a obtenu exactement le contraire.

• Le milieu de 43/32 et 23/16 est 89/64. Les premiers termes de la suite (u_n) associée à 89/64 sont

k= 1 , 2.008680059
k= 2 , 2.484490903
k= 3 , 2.998753019
k= 4 , 4.012101252
k= 5 , 9.210478308

Donc $u_4 \geq 4$ et $89/64 \simeq 1,390 \in A_\infty$.

• Le milieu de 43/32 et 89/64 est 175/128. Les premiers termes de la suite (u_n) associée à sont

k= 1 , 1.962149036
k= 2 , 2.371533393
k= 3 , 2.678452043
k= 4 , 2.912506733
k= 5 , 3.067145314
k= 6 , 3.068642144
k= 7 , 2.689083966
k= 8 , 1.635354153
k= 9 , 0.5131274931

Donc $u_9 < 1$ et $175/128 \simeq 1,367 \in A_0$.

• Le milieu de 175/128 et 89/64 est 353/256. Les premiers termes de la suite (u_n) associée à sont

k= 1 , 1.985278228
k= 2 , 2.4270243
k= 3 , 2.831282924
k= 4 , 3.393442903
k= 5 , 4.961377549
k= 6 , 20.39862303
k= 7 , 90348184.97
Error : Overflow/underflow in arithmetical operation ; during evaluation of 'exp : :float'

Donc $u_6 \geq 6$ et $353/256 \simeq 1,378 \in A_\infty$.

• Ainsi $1,367 \leq m \leq 1,378$. Pour abréger, "sortons de l'algorithme" et vérifions immédiatement si $1,37$ appartient à A_0 ou A_∞. La suite (u_n) associée à $1,37$ est

k= 1 , 1.967675348
k= 2 , 2.384675506
k= 3 , 2.713884885
k= 4 , 3.017555217
k= 5 , 3.406876017
k= 6 , 4.310120527
k= 7 , 9.306182693

Donc $u_7 \geq 7$ et $1,37 \in A_\infty$. En conclusion

$$1,367 \leq m \leq 1,37$$

et 1.36 est la valeur approchée par défaut à 10^{-2} près de m.

Remarque : On obtiendrait $1,367901 \leq m \leq 1,367902$ en poussant les calculs.

Remarque du correcteur (chutt, c'est entre vous et moi !) : D'après moi, une telle question "chronovore" ne saurait être abordée en temps limité. Sur une épreuve d'une durée de 5 heures, on peut se permettre de réfléchir et d'avancer au brouillon de manière "significative" seulement si l'on engrange des points. On veillera à ne pas rester "scotché" dans des recherches laborieuses prenant plus de 10 minutes sans "avancer" ou "suivre une piste qui puisse rapporter des points".

Le candidat doit s'habituer à récolter tous les points des questions qu'il sait faire et qui se résolvent en un temps raisonnable (par rapport aux 5 heures), ayant toujours la possibilité de retourner chercher une démonstration plus longue et plus compliquée lorsqu'il ne trouve plus rien de rentable à résoudre dans l'ensemble du problème. Il ne perdra jamais de vue que le but des 5 heures d'épreuve est de montrer au correcteur **tout ce qu'il connaît**, sans mettre l'accent sur ce qu'il ne connaît pas, ou mal, et sans hypothéquer la suite sur des développements trop longs. Il ne faut pas achever l'épreuve en disant "Ah, je suis resté dans telle question pendant une heure sans rien trouver, ou si peu, et maintenant que je suis sorti de la salle du concours, je m'aperçois que j'aurais pu facilement résoudre une dizaine de questions dans la dernière partie !". Pensez-y "avant d'aller au feu" : c'est important.

Pour ma part, j'ai perdu énormément de temps à résoudre ces questions d'approximation de m qui ne m'auraient valu que... quelques epsilons de points si j'avais passé le concours. J'aurai alors sauté la question en priorité (ou râté le concours), quitte à y revenir plus tard (ça, c'est pour au moins nous rassurer quand on saute une question !). Cela n'enlève rien au rôle formateur de ce genre de développement qui nous fournit un bon entraînement lorsqu'on dispose de plus de temps.

4.5. Supposons par l'absurde que m appartienne à A_0. Notons (u_n) la suite associée à m (c'est-à-dire telle que $u_0 = m$). On a

$$m \in A_0 \Rightarrow E_m \neq \varnothing \Rightarrow \lim u_n = 0 \underset{(*)}{\Rightarrow} \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad u_{n_0} < \ln(n_0 + 2),$$

l'implication $(*)$ étant vérifiée en utilisant la contraposée de la seconde assertion prouvée à la question **3.3**. Il existe un unique réel a tel que la suite (v_n) associée à a vérifie $v_{n_0} = \ln(n_0 + 2)$. Pour en être persuadé, il suffit, à partir de v_{n_0}, de définir les termes v_0, ..., v_{n_0-1} par récurrence descendante en utilisant la formule $u_{n+1} = e^{u_n}/n + 2$, ou encore de poser

$$a = \ln(2 \ln 3 ... \ln((n_0 + 1) \ln(n_0 + 2))).$$

Puisque

$$u_n < v_n \Leftrightarrow \frac{e^{u_n}}{n+2} < \frac{e^{v_n}}{n+2} \Leftrightarrow u_{n+1} < v_{n+1},$$

on déduit

$$u_{n_0} < v_{n_0} \Leftrightarrow u_{n_0-1} < v_{n_0-1} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow u_0 = m < v_0 = a.$$

De plus la suite (v_n) converge, puisque

$$\begin{aligned} v_{n_0} = \ln(n_0+2) \quad &\Rightarrow \quad v_{n_0+1} = \frac{e^{\ln(n_0+2)}}{n_0+2} = 1 \\ &\Rightarrow \quad v_{n_0+2} = \frac{e^1}{n_0+3} < 1 \Rightarrow E_a \neq \varnothing \Rightarrow \lim v_n = 0. \end{aligned}$$

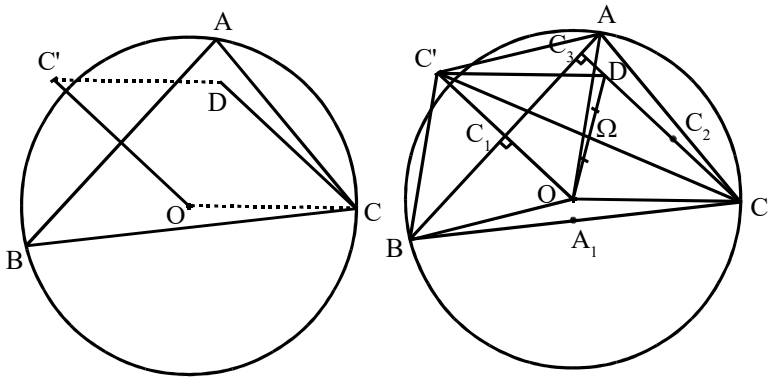
Finalement, nous avons trouvé un réel a strictement supérieur à m et tel que $E_a \neq \varnothing$, autrement dit tel que $a \in A_0$. Cela contredit la définition de m.

SECOND PROBLEME : GÉOMÉTRIE DANS LE PLAN COMPLEXE

I.0.1. La condition est clairement nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Supposons donc que M soit l'orthocentre du triangle NPQ. Alors $(MN) \perp (PQ)$ et $(PN) \perp (MQ)$. Cela signifie que N est l'orthocentre du triangle MPQ. On démontrerait de même que chacun des sommets de $(MNPQ)$ est 1'orthocentre du triangle formé par les trois autres sommets.

I.1.1. Le point C' est distinct de O, sinon O appartient à (AB) et l'égalité $OA = OB$ montre que O est le milieu de $[AB]$. Dans ce cas ABC est rectangle en C (puisque C appartient au cercle de diamètre $[AB]$) et cela contredit l'hypothèse.
Le quadrilatère $AOBC'$ possède quatre côtés égaux (en effet $OA = OB$ puisque A et B appartiennent à Γ, et $OA = C'A$ et $OB = C'B$ par symétrie par rapport à (AB)), donc est un losange. Un losange possède des diagonales qui se coupent en leur milieu, donc $\frac{a+b}{2} = \frac{0+c'}{2}$ et l'affixe de C' sera $c' = a + b$.

I.1.2.a. Si les points O, C', D, C sont alignés, alors $(OC') = (OC)$ et comme (OC') est perpendiculaire à (AB), on trouve que (OC) est perpendiculaire à (AB). La droite (OC) est perpendiculaire à (AB) et passe par le point O situé à équidistance de A et B, c'est donc la médiatrice de $[AB]$ et le triangle ABC est isocèle en C. Réciproquement, si le triangle ABC est isocèle en C, alors (OC) est la médiatrice de $[AB]$ et C' appartient à (OC). Dans ce cas les points O, C', D, C sont alignés. En conclusion les points O, C', D, C sont alignés si et seulement si ABC est isocèle en C.



Autre rédaction possible : Puisque (OC') est la médiatrice de $[AB]$,

$$\begin{aligned} O,\, C',\, D,\, C \text{ alignés} &\Leftrightarrow O,\, C',\, C \text{ alignés} \\ &\Leftrightarrow C \in \left(OC'\right) \Leftrightarrow CA = CB \\ &\Leftrightarrow ABC \text{ isocèle en } C. \end{aligned}$$

I.1.2.b. Puisque $OC'DC$ est un parallélogramme, (CD) est parallèle à (OC'), et puisque (OC') est perpendiculaire à (AB), (CD) sera aussi perpendiculaire à (AB). Ainsi (CD) passe par C tout en étant perpendiculaire à (AB) : c'est la hauteur issue de C du triangle ABC.

I.1.3. L'égalité $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OC'}$ s'écrit $d - c = c' - 0$ d'où $d = c' + c = a + b + c$. Montrer que (AD) est perpendiculaire à (CB) revient à montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont orthogonaux, ce qui se traduit, en termes d'affixes, par $(d-a)\,\overline{(b-c)} \in i\mathbb{R}$. On vérifie donc :

$$(d-a)\,\overline{(b-c)} = (b+c)\left(\overline{b} - \overline{c}\right) = |b|^2 - |c|^2 + \overline{b}c - b\overline{c} = 2i\,\mathrm{Im}\left(\overline{b}c\right) \in i\mathbb{R}.$$

Ainsi (AD) et (CD) sont des hauteurs du triangle, D sera l'orthocentre du triangle ABC, et la dernière hauteur sera (BD).

Autre solution : L'égalité entre affixes $d - a = 2\frac{b+c}{2}$ montre que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{OA_1}$ d'où $(AD)\,//\,(OA_1)$. Comme $(OA_1) \perp (BC)$, on déduit $(AD) \perp (BC)$.

I.1.4. On vient de prouver que D est l'orthocentre de ABC, et la question préliminaire **I.0.1** montre que $(ABCD)$ est un quadrangle orthocentrique**.**

I.2.1. Comme C_1 et Ω sont les milieux respectifs de $[OC']$ et $[CC']$,

$$\overrightarrow{C_1\Omega} = \overrightarrow{C_1C'} + \overrightarrow{C'\Omega} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{C'C}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$$

et l'affixe de $\overrightarrow{C_1\Omega}$ sera $\frac{1}{2}c$. De même $\overrightarrow{\Omega C_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{\Omega C_2}$ sera d'affixe $\frac{1}{2}c$.

I.2.2. La question précédente donne $\Omega C_1 = \Omega C_2 = 1/2$ et montre que C_1 et C_2 appartiennent au cercle $\mathcal{C}_{ABC}$ de centre Ω et de rayon $1/2$. Comme les rôles joués par A, B et C dans toutes les questions précédentes sont interchangeables, et comme les affixes a, b, c sont toutes de module 1, on obtient de la même façon $\Omega A_1 = \Omega A_2 = 1/2$ et $\Omega B_1 = \Omega B_2 = 1/2$. Le cercle $\mathcal{C}_{ABC}$ passe donc par les 6 points A_i, B_i, C_i $(1 \leq i \leq 2)$.

Montrons que C_3 appartient aussi à $\mathcal{C}_{ABC}$. Les points C_3, D et C sont alignés sur la hauteur issue de C, donc $(C_3D) \perp (AB)$. Par ailleurs $(OC_1) \perp (AB)$, donc OC_1C_3D est un trapèze rectangle en C_1 et C_3. Le point Ω est milieu du côté $[OD]$ de ce trapèze, donc son projeté orthogonal U sur (AB) sera le milieu de $[C_1C_3]$, et le Théorème de Pythagore permet d'écrire

$$\Omega C_1^2 = \Omega U^2 + UC_1^2 = \Omega U^2 + UC_3^2 = \Omega C_3^2$$

d'où $\Omega C_1 = \Omega C_3$ et la conclusion désirée $C_3 \in \mathcal{C}_{ABC}$.

En recommençant avec B_3 puis A_3 à la place de C_3, on obtient $B_3, A_3 \in \mathcal{C}_{ABC}$.

I.2.3. L'image de $\mathcal{C}_{ABC}$ par h est un cercle de rayon $2 \times \frac{1}{2} = 1$ et de centre $h(\Omega) = O$. Donc $h(\mathcal{C}_{ABC}) = \Gamma$.

I.2.4. Si l'on applique ce qui précède au quadrangle orthocentrique $(ABCD)$, on constate que le cercle d'Euler $\mathcal{C}_{ABC}$ de ABC passe par les 9 points A_i, B_i, C_i $(1 \leq i \leq 2)$, et que ceux-ci sont bien les six milieux des côtés du quadrangle et les pieds des hauteurs du triangle ABC.

De la même façon, le cercle d'Euler $\mathcal{C}_{BCD}$ de BCD passera par 9 points : les six milieux des côtés du quadrangle et les pieds des hauteurs du triangle BCD. Les cercles $\mathcal{C}_{ABC}$ et $\mathcal{C}_{BCD}$ passent ainsi par les mêmes trois points non alignés A_1, B_1, C_1, donc sont identiques. Il suffit de recommencer avec le cercle d'Euler d'un autre triangle dont les sommets sont choisis parmi les sommets du quadrangle pour constater que l'on obtient toujours le même cercle d'Euler, et achever la preuve du Théorème 1.

Autre solution (proposée par M$^{\text{elle}}$ S. Skerritt en septembre 2002) — On vérifie que $\mathcal{C}_{ABC}$, cercle d'Euler de ABC, est aussi celui de ABD que l'on notera $\mathcal{C}_{ABD}$ (la preuve serait identique avec les deux autres triangles ACD et BCD). Pour cela on vérifie que C' est le centre du cercle Γ' circonscrit à ABD (on a $C'A = C'B = OA = 1$ puisque $OAC'B$ est un losange, et $C'D = OC = 1$ puisque $OC'DC$ est un losange) et l'on applique **I.2.3** :

$$\mathcal{C}_{ABD} = h_{C,\frac{1}{2}}(\Gamma') = \mathcal{C}\left(\Omega, \frac{1}{2}\right) = \mathcal{C}_{ABC}.$$

I.2.5. L'affixe de G est $g = \frac{1}{3}(a+b+c) = \frac{d}{3}$, donc $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OD}$ et les points O, D et G sont alignés. On sait aussi que Ω est le milieu de $[OD]$. De deux choses l'une :

a) Ou bien $O = D$, d'où $O = \Omega = D = G$ et ces quatre points confondus sont à fortiori alignés.

b) Ou bien $O \neq D$, et les égalités $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{O\Omega} = \overrightarrow{\Omega D}$ montrent que les points G et Ω appartiennent à la droite (OD).

Dans les deux cas, les points O, Ω, D, G sont alignés. Si $O \neq D$, le point G est l'unique point du segment $[OD]$ tel que $\frac{OG}{OD} = \frac{1}{3}$.

Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $O = D$. On se trouve alors dans le cas a) où $O = \Omega = D = G$. Le cercle d'Euler existe toujours, même si les 9 points sont maintenant réduits à 6 points distincts, mais la droite d'Euler n'est plus définie.

I.3.1. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{DC'}$ est $c' - d = (a+b) - (a+b+c) = -c$ On vérifie de même que les affixes des vecteurs $\overrightarrow{DB'}$ et $\overrightarrow{DA'}$ sont $-b$ et $-c$, d'où $DC' = DB' = DA' = 1$ et le cercle de centre D et de rayon 1 passe par les sommets du triangle $A'B'C'$.

La symétrie par rapport au point Ω transforme les points A, B, C, D respectivement en A', B', C', O. C'est une isométrie, donc elle conserve l'orthogonalité et transformera le quadrangle orthocentrique $(ABCD)$ en un nouveau quadrangle orthocentrique $(A'B'C'O)$.

Remarque — Les cercles d'Euler des triangles dont les sommets sont tous choisis dans $\{A, B, C, D\}$ ou bien dans $\{A', B', C', O\}$ seront tous égaux (puisque de centre Ω milieu de $[OD]$ et de rayon $1/2$). C'est ce qu'énonce le Théorème de la question suivante.

I.3.2. Théorème 2. Soit un quadrangle orthocentrique $(ABCD)$. Soient O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et A', B', C' les symétriques de O par rapport aux côtés du triangle ABC. Les huit triangles dont les sommets sont tous choisis dans $\{A, B, C, D\}$ ou bien dans $\{A', B', C', O\}$ ont le même cercle d'Euler ; ce cercle passe par les douze points rattachés au quadrangle, à savoir les 6 milieux du quadrangle $(ABCD)$, auxquels on ajoute les trois pieds des hauteurs du triangle ABC et les trois pieds des hauteurs du triangle $A'B'C'$.

Remarque : Dans le décompte des 12 points que l'on vient de faire, on ne s'intéresse plus aux 6 milieux du quadrangle (A', B', C', O) car les côtés $[OA']$, $[OB']$, $[OC']$ ont pour milieux respectifs A_1, B_1 et C_1 (déjà démontré plus haut), tandis que les côtés $[A'B']$, $[B'C']$, $[C'A']$ ont pour milieux respectifs C_2, A_2 et B_2, comme on le vérifie ci-dessous.

Vérifions que C_2, défini comme étant le milieu de $[CD]$, est aussi le milieu de $[A'B']$. En passant aux affixes, on a :

$$\begin{cases} c_2 = \dfrac{1}{2}(c+d) \\ a' = b + c \\ b' = a + c \end{cases}$$

donc le milieu de $[A'B']$ sera d'affixe m avec :

$$m = \frac{1}{2}(a'+b') = \frac{1}{2}(a+b+c+c) = \frac{1}{2}(d+c) = c_2$$

puisque $d = a + b + c$ (le point D étant l'orthocentre du triangle ABC).

I.3.3.a. Puisque G est d'affixe $g = \frac{1}{3}(a+b+c)$,

$$a + b + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad G = O$$

et tout revient à prouver que ABC est équilatéral si et seulement si $G = O$.

Si ABC est équilatéral, la médiane (AA_1) issue de A passe par A et A_1 qui sont tous deux équidistants des extrémités du segment $[BC]$, donc coïncide avec la médiatrice de $[BC]$. Ainsi les médianes du triangle coïncident avec les médiatrices des côtés et $G = O$.

Réciproquement, si $G = O$, la droite $(AG) = (AO)$ est la médiane issue de A donc passe par le milieu A_1 de $[BC]$. Comme elle passe aussi par O équidistant de B et C, c'est la médiatrice de $[BC]$. Il suffit alors de rappeler que $A \in (AG)$ pour déduire $AB = AC$. On recommence ensuite avec un autre sommet que A pour conclure à $AB = AC = CB$.

Autre solution (proposée par M. C. Duguet) : On oriente le plan de façon à ce que le triangle ABC soit direct. Alors

$$ABC \text{ équilatéral} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = ja \\ c = j^2 a \end{cases} \quad \Rightarrow \; a + b + c = a\left(1 + j + j^2\right) = 0.$$

La réciproque est vraie puisque

$$\begin{cases} a+b+c = 0 \\ |a| = |b| = |c| = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \left(\begin{cases} b = ja \\ c = j^2 a \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} b = j^2 a \\ c = ja. \end{cases} \right).$$

Le lecteur pourra vérifier cette dernière implication en exercice.

I.3.3.b. La droite d'Euler de ABC passe par O, D, Ω et G. Celle de $A'B'C'$ passe aussi par Ω (le centre du cercle d'Euler commun à ABC et $A'B'C'$) et

par O (ce point est l'orthocentre de $A'B'C'$ puisque la symétrie centrale par rapport à Ω transforme A, B, C, D en A', B', C', O, cf. **I.3.1**), donc sera confondue avec la précédente.

I.4. Leonhard Euler a mené l'étude générale des fonctions et mis en évidence les liens entre fonctions exponentielles et fonctions circulaires pour la première fois. On pense aux formules d'Euler

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$$

équivalentes à la notation $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Il s'intéressa au développement en série de e^x, aboutit à la formule $e = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ et obtint des valeurs approchées de e (base du logarithme népérien). L'expression en série entière de e lui permit de prouver l'irrationalité de ce nombre. Une constante porte son nom en analyse, c'est la constante d'Euler

$$c = \lim\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln n\right).$$

On lui doit la très belle formule $e^{i\pi} + 1 = 0$ qui fait intervenir les cinq nombres les plus mystérieux de l'analyse réelle et complexe.

Enfin Euler est à l'origine de plusieurs symboles qui sont toujours employés : la base de l'exponentielle e, le nombre i qui était appelé de façon trop ambigüe $\sqrt{-1}$, la notation usuelle $f(x)$ pour les fonctions, mais aussi la notation $\sum$ pour désigner des sommes.

II.1. La perpendiculaire Δ_{AB} à (AB) passant par O est à la fois médiatrice de $[AB]$ et $[CD]$. La réflexion par rapport à Δ transforme donc O, A et C en O, B et D. Puisqu'une réflexion inverse les angles, on obtient

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = -(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB}).$$

Posons $\theta := (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB})$. Comme les points A, B, C, D appartiennent à Γ, la rotation r de centre O et d'angle θ vérifie $r(A) = C$ et $r(D) = B$. L'expression complexe de cette rotation est $r(z) = e^{i\theta}z$, donc $c = e^{i\theta}a$ et $b = e^{i\theta}d$, et cela entraîne évidemment $ab = cd$.

II.2.1.a. Soit Z_1 l'intersection de la demi-droite $[OZ)$ et de Γ. Soit S_1 l'intersection de la demi-droite $[OS)$ et de Γ. Les affixes de Z_1 et S_1 sont $\frac{z}{|z|}$ et $\frac{s}{|s|}$, et les cordes $[AB]$ et $[Z_1S_1]$ sont parallèles de sorte que l'on puisse appliquer la question précédente : $\frac{s}{|s|}\frac{z}{|z|} = ab$. En fait $|s| = |z|$ et l'on obtient $s = ab\overline{z}$. Comme $[TS]$ et $[AB]$ ont même milieu, on obtient $\frac{t+s}{2} = \frac{a+b}{2}$ d'où

$$t = a + b - s = a + b - ab\overline{z}.$$

Le résultat est encore valable lorsque $Z = O$. Dans ce cas $Z = O = S$, $z = 0 = s$ et $\frac{t+s}{2} = \frac{a+b}{2}$ donne $t = a + b$, tout comme la formule ci-dessus.

II.2.1.b. Si $Z \in (AB)$ alors S est le symétrique de Z par rapport à I. Dans ce cas le symétrique T de S par rapport à I est à nouveau Z, donc $Z = T$. Réciproquement, si $Z = T$, I et H (milieu de $[ZS]$) sont confondus et Z appartient à la perpendiculaire à Δ_{AB} passant par I, i.e. $Z \in (AB)$.

Autre solution : Avec des notations évidentes, $T = s_I \circ s_{\Delta_{AB}}(Z)$. La symétrie centrale s_I se décompose en $s_I = s_{(AB)} \circ s_{\Delta_{AB}}$, donc $T = s_{(AB)}(Z)$. Les équivalences suivantes sont maintenant évidentes :

$$Z = T \;\Leftrightarrow\; Z = s_{(AB)}(Z) \;\Leftrightarrow\; Z \in (AB).$$

II.2.1.c. On obtient bien

$$Z \in (AB) \;\Leftrightarrow\; z = t \;\Leftrightarrow\; z = a + b - ab\overline{z} \;\Leftrightarrow\; z + ab\overline{z} = a + b.$$

II.2.1.d. Il suffit d'appliquer la caractérisation ci-dessus avec $a = p$ et $b = -p$ pour obtenir

$$Z \in (PQ) \quad \Leftrightarrow \quad z - p^2\overline{z} = 0.$$

II.2.2. Le point $Z(z)$ appartient à la droite Δ si et seulement si son image $t(Z)$ par la translation t de vecteur $\overrightarrow{Z_0O}$ appartient à la droite (PQ). Comme $t(Z)$ est d'affixe $z - z_0$, cette dernière affirmation équivaut à

$$(z - z_0) - p^2(\overline{z} - \overline{z}_0) = 0$$

(voir **II.2.1.d**) ou encore à (2).

II.2.3. D'après **II.2.2**, la droite (AB) admet l'équation $z - p^2\overline{z} = b - p^2\overline{b}$. Comme a vérifie cette équation, p sera tel que $a - p^2\overline{a} = b - p^2\overline{b}$, et l'on obtient

$$p^2 = \frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}} = \frac{(a-b)^2}{|a-b|^2} \quad \text{d'où } p = \pm\frac{(a-b)}{|a-b|}.$$

Le coefficient directeur complexe de (AB) sera donc égal à $-p^2 = -\frac{(a-b)^2}{|a-b|^2}$.

Remarques : 1) La question **II.2.1.c** nous offre aussi une équation complexe de (AB), à savoir $z + ab\overline{z} = a + b$, et nous conduit à proposer ab pour coefficient directeur complexe de (AB). En fait, ces deux valeurs trouvées sont égales, puisque

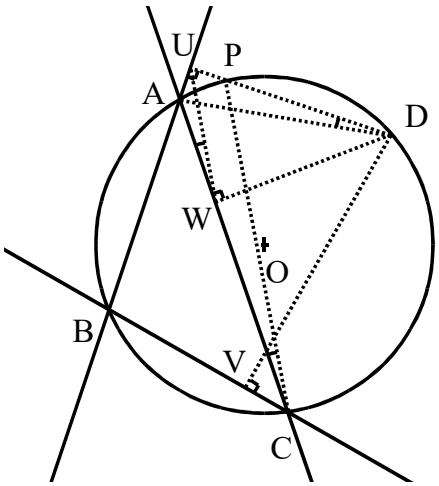
$$ab = -\frac{(a-b)^2}{|a-b|^2} \Leftrightarrow ab\left(\overline{a} - \overline{b}\right) = -(a-b)$$

et que la dernière égalité est triviale si l'on rappelle que $|a| = |b|$.

2) Vérifions que, si $z + \alpha\overline{z} = \beta$ et $z + \alpha'\overline{z} = \beta'$ sont deux équations complexes de la même droite Δ, alors $(\alpha, \beta) = (\alpha', \beta')$. Si ces deux équations représentent la même droite, tous les affixes des points de cette droite vérifieront $(\alpha - \alpha')\,\overline{z} = \beta - \beta'$. Cette équation devra donc admettre une infinité de solutions complexes, et cela entraîne évidemment $\alpha = \alpha'$, puis $\beta = \beta'$.

II.3. Si $D' = D$, alors $[CD]$ est un diamètre de Γ et $d' = d = -c$. Si $D' \neq D$, le triangle CDD' est rectangle en D, donc D appartient au cercle $\mathcal{C}_{[CD']}$ de diamètre $[CD']$. Les cercles Γ et $\mathcal{C}_{[CD']}$ seront tous les deux circonscrits au triangle CDD', donc égaux, et $[CD']$ est bien un diamètre de Γ. On obtient donc encore $d' = -c$.

Il suffit de rappeler que $ab = cd$ (**II.1**) pour obtenir $d' = -c = -\dfrac{ab}{d}$.



II.4.1. Si $[CD]$ est un diamètre, les triangles CDA et CDB sont rectangles en A et B, donc $V = B$ et $W = A$. Le projeté U de D sur (AB) sera donc trivialement aligné avec U et V.

II.4.2.a. Par cocyclicité $(CA, CP) = (DA, DU)\ (\pi)$. Les triangles AUD et AWD sont rectangles en U et W, donc les points A, U, D, W appartiennent tous au cercle de diamètre $[AD]$. Cela entraîne $(WA, WU) = (DA, DU)\ (\pi)$. Les deux égalités obtenues donnent bien $(CA, CP) = (WA, WU)\ (\pi)$.

II.4.2.b. L'égalité $(CA, CP) = (WA, WU)\ (\pi)$ s'écrit

$$(CA, CP) = (CA, WU)\ (\pi)$$

et montre le parallélisme entre (UW) et (CP). Les droites (UW) et (CP) ont donc même coefficient directeur complexe, et celui de (CP) est pc d'après **II.2.1.c**. Il s'agit donc de calculer pc.

Le complexe p est déterminé par

$$(*) \quad \begin{cases} |p| = 1 \\ (a-b)\left(\overline{p-d}\right) \in i\mathbb{R}. \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \begin{cases} |p| = 1 \\ (a-b)\left(\overline{p-d}\right) + \overline{(a-b)}\,(p-d) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |p| = 1 \\ (a-b)\,\overline{p} + \left(\overline{a}-\overline{b}\right)p - (a-b)\,\overline{d} - \left(\overline{a}-\overline{b}\right)d = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |p| = 1 \\ \left(\overline{a}-\overline{b}\right)p^2 - \left[(a-b)\,\overline{d} + \left(\overline{a}-\overline{b}\right)d\right]p + a - b = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi p vérifie une équation du second degré qui possède une racine connue d. Les relations entre racines et coefficients donnent

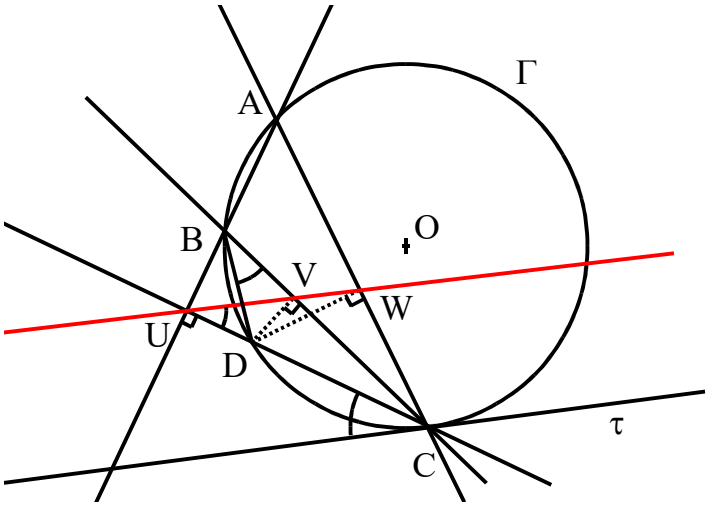
$$p + d = \frac{(a-b)\,\overline{d} + \left(\overline{a}-\overline{b}\right)d}{\overline{a}-\overline{b}} = d + \frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}}\overline{d} = d - ab\overline{d}$$

d'où $p = -ab\overline{d}$. Le coefficient directeur complexe de (UW) sera donc

$$pc = -abc\overline{d}.$$

Par permutation circulaire des points A, B, C, on montrerait de même que le coefficient directeur complexe de (VU) est encore $-abc\overline{d}$. Les coefficients directeurs des droites (UW) et (VU) sont donc égaux, et ces droites sont parallèles, et même égales puisqu'elles passent toutes les deux par U. Les points U, V, W seront donc bien alignés.

II.4.3. On montre que $(UV, CD) = (\tau, CD)$ (π) ce qui entraîne le parallélisme entre (UV) et τ. Un raisonnement similaire montrerait que (UW) et τ sont parallèles, et l'on en déduit que (UV) et (UW) sont parallèles, autrement dit que les points U, V, W sont alignés.



Vérifions donc que $(UV, CD) = (\tau, CD)\ (\pi)$. Les points U, B, V, D sont cocycliques donc $(UV, CD) = (UV, UD) = (BV, BD)\ (\pi)$. Toujours par cocyclicité on obtient

$$(BV, BD) = (BC, BD) = (\tau, CD)\ (\pi)\,,$$

et les deux égalités obtenues donnent

$$(UV, CD) = (BV, BD) = (\tau, CD)\ (\pi)\,.$$

II.5.1. On a vu en I.1.3 que l'orthocentre H de ABC était d'affixe $a+b+c$.

Remarque : Pour le redémontrer rapidement, on vérifie que le point H d'affixe $a+b+c$ satisfait $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0$ (on recommencerait de la même façon pour obtenir $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA} = 0$ et $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = 0$). L'égalité $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0$ équivaut à $(c+b)\left(\overline{c}-\overline{b}\right) \in i\mathbb{R}$, et cela se vérifie aisément :

$$(c+b)\left(\overline{c}-\overline{b}\right) = b\overline{c} - \overline{b}c = 2i\,\mathrm{Re}\,(b\overline{c})\,.$$

On peut se rappeler la valeur de l'affixe de l'orthocentre H en retenant la formule d'Euler $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ où $G\left((a+b+c)/3\right)$.

II.5.2. D'après (1), l'équation complexe de (AB) est

$$(AB): \quad z + ab\overline{z} = a + b.$$

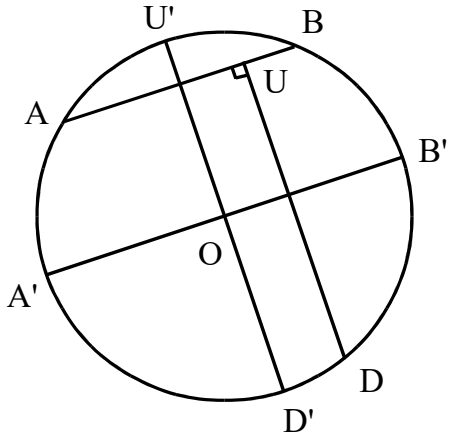
On a $(DU) \perp (AB)$. Soit $[A'B']$ un diamètre de Γ parallèle à (AB). Une équation de $(A'B')$ sera $z - a'^2\overline{z} = 0$ où $A'\,(a')$ et $a'^2 = -ab$ (cf. **II.2.1.d**). Soit $[D'U']$ un diamètre de Γ parallèle à (DU). On peut toujours supposer que D'

est l'image de A' par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, donc que D' est d'affixe ia'. Par suite, une équation de $(D'U')$ sera $z - (ia')^2 \overline{z} = 0$ (cf. **II.2.1.d**), ce qui s'écrit

$$\left(D'U'\right) : \quad z - ab\overline{z} = 0.$$

On en déduit une équation complexe de (DU) (cf. **II.2.2**) :

$$(DU) : \quad z - ab\overline{z} = d - ab\overline{d}.$$



Le point U est à l'intersection de (AB) et (DU), donc son affixe u vérifie le système

$$\begin{cases} u + ab\overline{u} = a + b \\ u - ab\overline{u} = d - ab\overline{d} \end{cases}$$

d'où

$$u = \frac{1}{2}\left(a + b + d - ab\overline{d}\right).$$

II.5.3. On vérifie simplement que les affixes de chacune des projections U, V, W vérifient l'équation (3). Pour u, on obtient

$$\begin{aligned} u - \frac{abc}{d}\overline{u} &= \frac{1}{2}\left(a + b + d - ab\overline{d}\right) - \frac{abc}{d} \times \frac{1}{2}\left(\overline{a} + \overline{b} + \overline{d} - \overline{a}\overline{b}d\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(a + b + c + d\right) + \frac{1}{2}\left[-c - ab\overline{d} - \frac{abc}{d}\left(\overline{a} + \overline{b} + \overline{d} - \overline{a}\overline{b}d\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(a + b + c + d\right) + \frac{1}{2d}\left[-cd - ab - bc - ac - abc\overline{d} + cd\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(a + b + c + d\right) - \frac{abc}{2d}\left(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \overline{d}\right). \end{aligned}$$

Les points U, V, W sont donc alignés sur la droite d'équation (3) qui n'est autre que la droite de Simson de D relativement au triangle ABC.

II.5.4. Il suffit de vérifier que l satisfait l'équation (3) pour prouver que L appartient à la droite de Simson de D relativement au triangle ABC. Les équations des trois autres droites de Simson s'obtiennent, à partir de (3), par permutations circulaires de a, b, c, d, et le point l est invariant par ces permutations circulaires. On peut donc affirmer que L appartient à chacune des trois droites de Simson définies dans le théorème 3.

On sait (**Partie I**) que le cercle d'Euler $\mathcal{C}_{ABC}$ du triangle ABC est de centre Ω d'affixe $\frac{1}{2}(a+b+c)$ et de rayon $\frac{1}{2}$. Son équation complexe est donc

$$\left|z - \frac{1}{2}(a+b+c)\right| = \frac{1}{2},$$

et l vérifie clairement cette équation. On conclut (par permutations circulaires) que L appartient bien aux cercles d'Euler des quatre triangles construits avec les sommets du quadrilatère $ABCD$.

La figure 1.2 montre les quatre droites de Simson et les quatre cercles d'Euler passant par L.

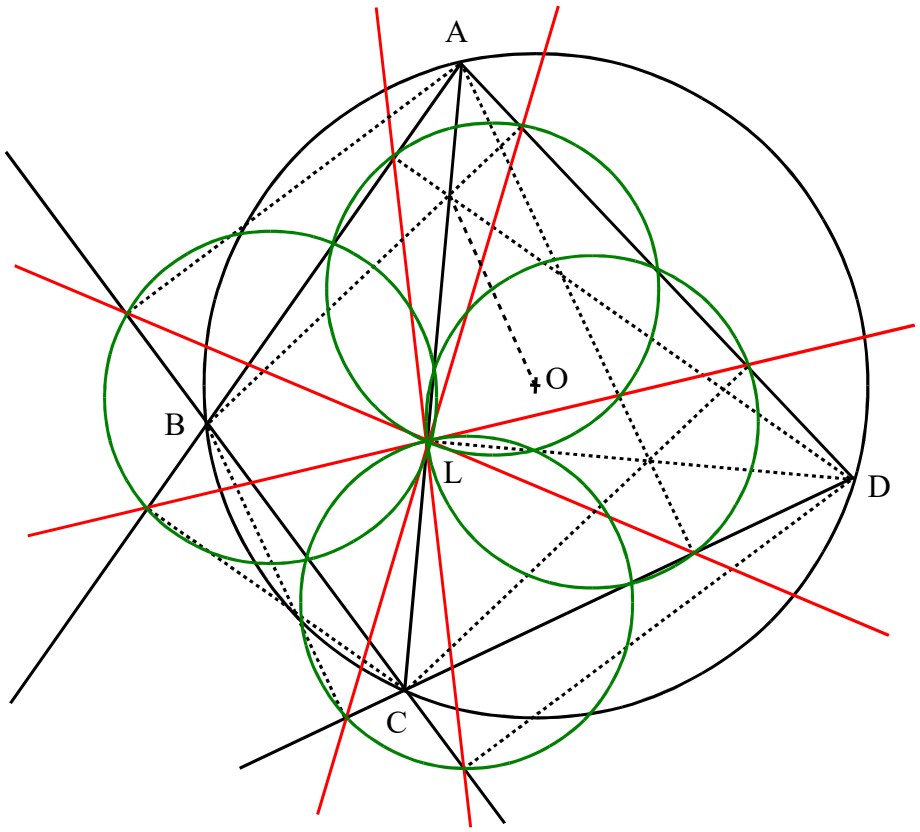


FIG. 1.2 – Vue d'ensemble

Chapitre 2

Année 2003

2.1 Énoncé

PREMIER PROBLEME

Un concours de tir au pistolet entre deux compétiteurs A et B est constitué d'une suite d'épreuves consistant, pour chacun des compétiteurs, en un tir visant à atteindre une cible. Les deux compétiteurs tirent simultanément, chacun d'eux disposant de sa cible personnelle. On associe à ce concours une expérience aléatoire.

N.B. : il n'est pas nécessaire que le candidat explicite un espace probabilisé correspondant à cette expérience.

On suppose que cette expérience aléatoire est telle que :

1° à chaque épreuve :

(i) le compétiteur A a la probabilité $\frac{2}{3}$ de toucher sa cible,

(ii) le compétiteur B a la probabilité $\frac{1}{2}$ de toucher sa cible,

(iii) les résultats obtenus par A et par B sont indépendants l'un de l'autre ;

2° toutes les épreuves sont mutuellement indépendantes.

A l'issue de chaque épreuve, il faut avoir touché sa cible pour être autorisé à poursuivre le concours ; sinon, on est éliminé. Le concours cesse lorsque les deux compétiteurs ont été éliminés. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on considère les événements suivants :

A_n : à l'issue de la n^e épreuve, seul le compétiteur A n'est pas éliminé ;

B_n : à l'issue de la n^e épreuve, seul le compétiteur B n'est pas éliminé ;

C_n : à l'issue de la n^e épreuve, aucun compétiteur n'est éliminé ;

D_n : à l'issue de la n^e épreuve, les deux compétiteurs sont éliminés.

On convient en outre que C_0 désignera l'événement certain, et que A_0, B_0, D_0 désigneront l'événement impossible. D'autre part : E et F étant deux événements quelconques associés à cette expérience :

- on désignera par $p(E)$ (respectivement $p(F)$) la probabilité de l'événement E (respectivement F) ;

- on utilisera la notation habituelle $p(E/F)$ pour désigner la probabilité conditionnelle de E sachant F. On convient enfin de poser, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $p(D_{n+1}/D_n) = 1$.

Partie I

Dans cette partie, on s'intéresse au nombre d'épreuves à l'issue desquelles intervient la première élimination.

1. Déterminer les 12 probabilités conditionnelles suivantes :

$$p\,(A_{n+1}/A_n) \quad p\,(B_{n+1}/A_n) \quad p\,(C_{n+1}/A_n) \quad p\,(D_{n+1}/A_n)$$

$$p\,(A_{n+1}/B_n) \quad p\,(B_{n+1}/B_n) \quad p\,(C_{n+1}/B_n) \quad p\,(D_{n+1}/B_n)$$

$$p\,(A_{n+1}/C_n) \quad p\,(B_{n+1}/C_n) \quad p\,(C_{n+1}/C_n) \quad p\,(D_{n+1}/C_n)$$

2. On note T la variable aléatoire réelle qui prend pour valeur le numéro de l'épreuve à l'issue de laquelle a lieu la première élimination. Pour tout entier naturel n non nul, l'événement « la première élimination intervient à l'issue de la n^e épreuve » sera noté $\{T = n\}$, et la probabilité de cet événement sera notée $p(T = n)$.

2.1. Déterminer la probabilité de l'événement $\{T = 1\}$.

2.2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

2.2.1. Décrire l'événement représenté par $\bigcap_{1\leq k\leq n} C_k = C_1 \cap ... \cap C_n$. Déterminer la probabilité de cet événement.

2.2.2. L'événement C_n : « aucun compétiteur n'est éliminé à l'issue de la n^e épreuve », est également noté $\{T > n\}$. Déterminer sa probabilité $p(T > n)$, puis en déduire la probabilité $p(T = n)$. Vérifier que cette formule reste valable pour $n = 1$.

2.3. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} p\,(T = k)$. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

2.4. On suppose toujours que l'entier n est supérieur ou égal à 2.

2.4.1. Démontrer que : $p\,(T > n-1) = p\,(T = n) + p\,(T > n)$.

2.4.2. Vérifier l'égalité : $n.p\,(T > n) + \sum_{k=1}^{n} k.p\,(T = k) = \sum_{k=0}^{n-1} p\,(T > k)$.

2.4.3. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} k.p\,(T = k)$. Quelle interprétation peut-on en donner ?

Partie II

Dans cette partie, on s'intéresse à la probabilité de chacune des éventualités observables à l'issue d'un nombre donné d'épreuves.

1. Soit n un entier naturel. Dans $\mathbb{R}^4$, on désigne par V_n le vecteur

$$(p(A_n), p(B_n), p(C_n), p(D_n))$$

et par X_n la matrice unicolonne associée à ce vecteur :

$$X_n = \begin{pmatrix} p(A_n) \\ p(B_n) \\ p(C_n) \\ p(D_n) \end{pmatrix}.$$

On appelle M la matrice 4×4 telle que $X_{n+1} = MX_n$ (appelée *matrice de transition*).

1.1. En utilisant la formule des probabilités totales et les résultats obtenus dans la partie I, déterminer la matrice M.

1.2. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a $X_n = M^n X_0$.

2. On se propose ici de calculer la matrice M^n. On considère pour cela les deux matrices 4×4 ci-dessous :

$$\Delta = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.1. Calculer le produit de matrices $P\Delta P$.

2.2. Pour tout entier naturel n non nul, calculer Δ^n.

2.3. Calculer la matrice P^2. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a $M^n = P\Delta^n P$.

3. On cherche maintenant à déterminer les limites des probabilités $p(A_n)$, $p(B_n)$, $p(C_n)$, $p(D_n)$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

3.1. Expliquer pourquoi, pour déterminer X_n, il suffit de calculer la troisième colonne de M^n.

3.2. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} p\,(A_n)\,, \quad \lim_{n\to+\infty} p\,(B_n)\,, \quad \lim_{n\to+\infty} p\,(C_n)\,, \quad \lim_{n\to+\infty} p\,(D_n)\,.$$

Pouvait-on prévoir ces résultats ?

SECOND PROBLEME

Dans sa Géométrie parue en 1637 chez. Jan Mair à Leyde, René Descartes (1596-1650) énonce une règle permettant de majorer le nombre de solutions réelles d'une équation polynomiale d'inconnue x, de la forme $P(x) = 0$, à partir des signes des coefficients du polynôme P ; elle revient à dire que, si 0 n'est pas solution de l'équation, le nombre de solutions réelles positives est inférieur ou égal au nombre de changements de signe dans la suite finie des coefficients non nuls de P (ordonnée selon les puissances décroissantes des monômes correspondants). [N.B. : Pour obtenir une majoration du nombre de solutions négatives, il suffit d'appliquer cette règle à l'équation $P(-x) = 0$.]

Exemple *: Soit l'équation $x^5 - 3x^3 - 4x^2 + 2x + 4 = 0$. La suite des coefficients associée à cette équation est 1, −3, −4, 2, 4. On constate qu'il y a deux changements de signes. La règle de Descartes permet alors d'affirmer que l'équation admet au plus deux solutions positives. Pour majorer le nombre de solutions négatives, on considère la suite −1, 3, −4, −2, 4 qui comporte trois changements de signes ; l'équation admet donc au plus trois solutions négatives. (La résolution de l'équation montre qu'elle admet en fait trois racines réelles, qui sont −1, 1 et 2.)*

Nous allons, sur quelques cas particuliers, vérifier la règle de Descartes et étudier quelques développements collatéraux.

1. Exemple de l'équation du troisième degré $x^3 - 2x - a = 0$ où a est un nombre réel

1.1. Étude du cas particulier $a = 1/2$.

1.1.1. Étudier la fonction f de la variable réelle x définie par

$$f(x) = x^3 - 2x - \frac{1}{2}$$

(on précisera l'ensemble de définition, l'existence éventuelle d'un élément de symétrie et le choix d'un intervalle d'étude qui en découle, la continuité, l'étude des branches infinies, la dérivabilité et l'étude des variations de f).

1.1.2. Tracer la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan (on prendra 2 cm pour mesurer les vecteurs unités).

1.1.3. Déduire de l'étude précédente le nombre de solutions réelles positives et le nombre de solutions réelles négatives de l'équation :

$$(1) \qquad x^3 - 2x - \frac{1}{2} = 0.$$

1.2. On se propose maintenant de donner une résolution « trigonométrique » de l'équation (1).

1.2.1. Établir que, pour tout nombre réel α, on a

$$\cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha).$$

(N.B. : la notation $\cos(\theta)$ désigne, ici et dans la suite, le cosinus de l'angle dont une mesure en radians est θ).

1.2.2. En utilisant le changement d'inconnue $y = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}x$, montrer que résoudre l'équation (1) revient à résoudre l'équation :

$$(2) \qquad 4y^3 - 3y - \frac{3\sqrt{3}}{8\sqrt{2}} = 0.$$

1.2.3. Déterminer le nombre réel φ $(0 < \varphi < \pi)$ tel que $\cos(\varphi) = \frac{3\sqrt{3}}{8\sqrt{2}}$ (on n'oubliera pas de justifier l'existence et l'unicité de φ, et on en donnera une valeur décimale approchée par défaut à 10^{-3} près).

1.2.4. Déterminer les nombres réels α tels que $\cos(3\alpha) = \cos(\varphi)$.

1.2.5. En déduire, pour chacune des solutions réelles de l'équation (1), une valeur décimale approchée à 10^{-3} près par défaut.

1.3. Étude du cas général (a est ici un nombre réel quelconque).

1.3.1. Préciser une transformation géométrique dans laquelle la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f définie en 1.1.1. a pour image la courbe représentative $\mathcal{C}_a$ de la fonction g_a, définie par $g_a(x) = x^3 - 2x - a$, où a est un paramètre réel.

1.3.2. En déduire le nombre de solutions réelles de l'équation

$$x^3 - 2x - a = 0$$

selon les valeurs de a (on justifiera avec soin les affirmations énoncées et on vérifiera dans ce cas la règle énoncée par Descartes).

2. Étude des équations du type $x^3 + px + q = 0$ (où p et q sont des nombres réels)

2.1. Degré de généralité de ce type.
On se propose tout d'abord de démontrer de façon classique que l'on peut ramener l'étude d'une équation de la forme :

$$(3) \qquad ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

(où a, b, c, d sont des coefficients réels tels que $a \neq 0$) à l'étude d'une équation de la forme :

$$(4) \qquad y^3 + py + q = 0$$

(où p et q sont des coefficients réels).
Pour cela, après avoir mis le coefficient a en facteur, on cherchera y sous la forme $y = x - k$, où k est un réel que l'on déterminera. On précisera alors les valeurs de p et de q en fonction des coefficients a, b, c, d.

2.2. Exemples divers.
Donner, pour chacun des six cas cités ci-après, un exemple d'équation du type (3) et vérifier, pour chaque exemple, la validité de la règle donnée par Descartes.

(1) L'équation a une seule solution réelle, qui est strictement négative.

(2) L'équation a une seule solution réelle, qui est strictement positive.

(3) L'équation a deux solutions réelles distinctes, strictement positives.

(4) L'équation a deux solutions réelles non nulles, de signes contraires.

(5) L'équation a trois solutions distinctes, strictement négatives.

(6) L'équation a trois solutions réelles distinctes non nulles, dont l'une est de signe contraire à celui des deux autres.

2.3. Solutions réelles de l'équation $x^3 + px + q = 0$ (où p et q sont des nombres réels).

2.3.1. Etudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x^3 + px + q.$$

2.3.2. En déduire que l'équation (4) admet toujours au moins une solution réelle.

2.3.3. Dans le cas où p est strictement positif, montrer que l'équation (4) n'admet qu'une seule solution réelle. Donner son signe selon le signe de q et vérifier, dans ce cas, la règle énoncée par Descartes.

2.3.4. Que deviennent les résultats de la question précédente lorque p est

nul ?

2.3.5. Dans le cas où p est strictement négatif, on note x_1 et x_2 les réels où g atteint ses extremums (avec $x_1 < 0 < x_2$), et on pose $y_1 = g(x_1)$ et $y_2 = g(x_2)$. Déduire de ce qui précède une étude du nombre de solutions réelles de l'équation (4) et de leur signe, dans chacun des trois cas $q > 0$, $q = 0$ et $q < 0$. Là encore, on s'assurera que la règle de Descartes est bien vérifiée.

2.4. Un peu d'histoire : quelle(s) notion(s) usuelle(s) figurant dans les programmes de l'enseignement secondaire pouvez-vous attribuer à René Descartes ?

3. Approche numérique des solutions d'une équation polynomiale du troisième degré

On se propose maintenant de rechercher, à l'aide de deux algorithmes classiques, des valeurs décimales approchées, à une précision donnée, des solutions d'une équation polynomiale du troisième degré. Le procédé utilisé dans le premier cas est connu depuis l'Antiquité : il s'agit de la dichotomie, que l'on retrouve par exemple dans les fameux paradoxes de Zénon d'Elée (V^e siècle avant notre ère). Le second, plus sophistiqué, a pour origine Isaac Newton (1642-1727).

3.1 Application de la dichotomie à l'approximation d'une solution de l'équation polynomiale du troisième degré $x^3 - 5x + 2 = 0$.

3.1.1. Montrer qu'un nombre rationnel non nul, représenté par la fraction irréductible u/v (où $u \in \mathbb{Z}^*$ et $v \in \mathbb{N}^*$), est un nombre décimal si, et seulement si, la décomposition de v en facteurs premiers est de la forme $v = 2^m 5^p$, avec $m \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$.

3.1.2. Soit h la fonction de la variable réelle x définie par

$$h(x) = x^3 - 5x + 2.$$

Montrer que l'équation (5) : $h(x) = 0$ admet une solution, et une seule, dans l'intervalle $[0; 1]$. On note s cette solution, et on se propose d'en donner une valeur décimale approchée par défaut à 10^{-5} près.

3.1.3. Soient x_1 et x_2 deux nombres réels de l'intervalle $[0; 1]$. Montrer que l'on a $h(x_1)\,h(x_2) \leq 0$ si, et seulement si, la solution s est comprise entre x_1 et x_2 (c'est-à-dire si l'on a $x_1 \leq s \leq x_2$ ou $x_2 \leq s \leq x_1$).

3.1.4. On définit sur $\mathbb{N}$ deux suites réelles (a_n) et (b_n) de la façon suivante :

(i) $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$,

(ii) pour tout entier n :

a. si $h(a_n).h\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \leq 0$, on pose $a_{n+1}=a_n$ et $b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$;

b. sinon, on pose $a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1}=b_n$.

3.1.4.1. Montrer que ces deux suites sont des suites monotones de nombres décimaux, admettant toutes deux pour limite le réel s défini en 3.1.2.

3.1.4.2. Déterminer un entier n_0 tel que a_{n_0} soit une valeur approchée de s à 10^{-5} près.

3.1.4.3. En utilisant ce qui précède, écrire un algorithme permettant de programmer une calculatrice pour déterminer une valeur décimale approchée de s par défaut à 10^{-5} près. Indiquer la valeur obtenue grâce à cet algorithme.

3.2. Application de la méthode dite de Newton (ou « de la tangente ») à l'approximation d'une solution de l'équation polynomiale du troisième degré (6) : x^3-2x-5.

3.2.1. Soit k la fonction de la variable réelle x définie par

$$k(x)=x^3-2x-5.$$

Montrer que l'équation (6) : $k(x)=0$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $[2\,;2,1]$ On notera σ cette solution.

3.2.2. Soit Γ la courbe représentative de k dans un repère orthonormal du plan, et soit c un nombre réel quelconque. Donner une équation cartésienne de la tangente à Γ au point $C(c\,;k(c))$. En déduire l'abscisse $\psi(c)$ du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses, lorsqu'il existe.

3.2.3. Soit c un nombre réel strictement supérieur à σ. Montrer que l'on a $k(c)>0$, puis établir que l'on a $0<\psi(c)<c$.

3.2.4. Montrer que, quels que soient les nombres réels a et b, on a :

$$k(b)-k(a)=(b-a)\,k'(a)+\frac{(b-a)^2}{2}k''(a)+\frac{(b-a)^3}{6}k'''(a).$$

3.2.5. On appelle m la valeur minimale de $|k'(c)|$ sur l'intervalle $[2\,;2,1]$ et M la valeur maximale de $|k''(c)|$ sur ce même intervalle. Démontrer que, pour tout réel c de l'intervalle $[\sigma\,;2,1]$, on a :

$$0\leq\psi(c)-\sigma\leq\frac{M+0,2}{2m}(c-\sigma)^2.$$

3.2.6. On définit sur $\mathbb{N}$ la suite réelle (c_n) suivante :

(i) $c_0=2$,

(ii) pour tout entier naturel n, $c_{n+1}=\psi(c_n)$.

Calculer c_1, puis montrer qu'à partir du rang 1 la suite (c_n) est décroissante et que cette suite converge vers σ.

3.2.7. Ecrire un algorithme permettant d'obtenir une valeur approchée par défaut de σ à 10^{-8} près.

3.3. Retour aux sources :

En réalité, la méthode décrite sous forme d'algorithme par Newton dans son ouvrage (en latin) De Methodis Serierum et Fluxionem*, rédigé entre 1664 et 1671, ne fait pas explicitement appel à la notion de tangente. Dans le cas qui nous occupe ici, elle peut se résumer ainsi :*

a. *on prend $x_0 = 2$, qui diffère de σ de moins de $0,1$;*

b. *on pose $x = 2 + p$. La résolution de l'équation* (6) *se ramène alors, par substitution, à celle de l'équation :*

$$(7) \qquad p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0 \ ;$$

c. *on néglige $p^3 + 6p^2$ « à cause de sa petitesse », ce qui ramène alors à l'équation $10p - 1 = 0$, qui donne $p = 0,1$;*

d. *on applique à* (7) *le procédé utilisé avec* (6)*, en posant cette fois $p = 0,1 + q$. La résolution de* (7) *se ramène alors à celle de l'équation :*

$$(8) \qquad q^3 + 6,3q^2 + 11,23q + 0,061 = 0 \ ;$$

e. *on réitère le même procédé, en résolvant l'équation $11,23q + 0,061 = 0$ qui donne « à peu près » $q = -0,0054$;*

f. *on poursuit en posant $q = -0,0054 + t$, et ainsi de suite, jusqu'à l'obtention de la précision désirée.*

Quel est le lien entre l'algorithme donné par Newton et la méthode mise en œuvre en 3.2 ?

2.2 Corrigé

PREMIER PROBLEME

I.1. La probabilité $p\left(A_{n+1}/A_n\right)$ pour que le compétiteur A ne soit pas éliminé à la $(n+1)$-ième épreuve sachant qu'il est le seul à ne pas avoir été éliminé à la n-ième épreuve est $2/3$ puisque les épreuves successives sont indépendantes entre elles et que le compétiteur A est toujours autorisé à concourir. Par contre $p\left(B_{n+1}/A_n\right) = 0$ puisque l'événement A_n ayant eu lieu, le compétiteur B a été éliminé et ne peut plus concourir. On obtient

$$p\left(A_{n+1}/A_n\right) = \frac{2}{3} \ ; \ p\left(B_{n+1}/A_n\right) = 0 \ ; \ p\left(C_{n+1}/A_n\right) = 0 \ ; \ p\left(D_{n+1}/A_n\right) = \frac{1}{3} \ ;$$

$$p\left(A_{n+1}/B_n\right)=0\ ;\ p\left(B_{n+1}/B_n\right)=\frac{1}{2}\ ;\ p\left(C_{n+1}/B_n\right)=0\ ;\ p\left(D_{n+1}/B_n\right)=\frac{1}{2}\ ;$$

$$p\left(A_{n+1}/C_n\right)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\ ;\ p\left(B_{n+1}/C_n\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\ ;$$

$$p\left(C_{n+1}/C_n\right)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\ ;\ p\left(D_{n+1}/C_n\right)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}.$$

Le calcul de $p\left(A_{n+1}/C_n\right)$ est un peu différent. On est dans l'hypothèse où C_n est vraie, autrement dit les deux compétiteurs concourent pour la $(n+1)$-ième épreuve. La probabilité pour que A soit le seul à ne pas être éliminé à l'issue de cette $(n+1)$-ième est donc égale à la probabilité qu'il ne soit pas éliminé, 2/3, multipliée par la probabilité pour que B soit éliminé sachant que A ne l'est pas, soit 1/2 puisque les éliminations de A et B sont des événements indépendants. Ainsi

$$p\left(A_{n+1}/C_n\right)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}.$$

Remarque : Les événements A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1} et D_{n+1} forment une partition de l'ensemble des possibles à la $(n+1)$-ième étape, donc les trois sommes

$$p\left(A_{n+1}/X_n\right)+p\left(B_{n+1}/X_n\right)+p\left(C_{n+1}/X_n\right)+p\left(D_{n+1}/X_n\right)$$

obtenues en faisant $X_n=A_n$, B_n ou C_n, doivent toujours valoir 1, ce que l'on vérifie aisément.

I.2.1. Puique l'événement $\{T=1\}$ est la réunion disjointe de A_1, B_1 et D_1,

$$p\left(T=1\right)=p\left(A_1\right)+p\left(B_1\right)+p\left(D_1\right)=\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}.$$

Autre solution : L'événement $\{T=1\}$ est le complémentaire de l'événement C_1, donc

$$p\left(T=1\right)=1-p\left(C_1\right)=1-\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{3}.$$

I.2.2.1. L'événement $C_1\cap...\cap C_n$ correspond au cas où aucun des compétiteurs n'est éliminé au premier tour, ni au second tour, ..., ni au n-ième tour. On a donc

$$C_1\cap...\cap C_n=C_n.$$

En effet, un élément de C_n correspond à une issue pour laquelle aucun des compétiteurs n'est éliminé au n-ième tour, et cela suppose qu'aucun des compétiteurs n'ait été éliminé dans un tour précédent. On traduit cette affirmation

par l'inclusion $C_n \subset C_1 \cap ... \cap C_n$, et l'on note que l'inclusion réciproque est triviale. On aura donc

$$\begin{aligned} p(C_n) &= p(C_1 \cap ... \cap C_n) \\ &= p(C_n/(C_1 \cap ... \cap C_{n-1})) \times ... \times p(C_2/C_1) \times p(C_1) \\ &= \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{3^n}. \end{aligned}$$

Remarque : Une autre façon de mener les calculs consiste à écrire

$$p(C_n) = p(C_n/C_{n-1}) \times p(C_{n-1}/C_{n-2}) \times ... \times p(C_2/C_1) \times p(C_1),$$

où les probabilités $p(C_n/C_{n-1})$ sont connues par (**I.1**) et où

$$p(C_1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

I.2.2.2. $p(T > n) = p(C_n) = 1/3^n$ donc

$$p(T = n) = p(T > n-1) - p(T > n) = \frac{1}{3^{n-1}} - \frac{1}{3^n} = \frac{2}{3^n}.$$

Si $n = 1$, on retrouve $p(T = 1) = 1 - 1/3 = 2/3$.

Autre solution : Puisque $\{T = n\}$ est la réunion disjointe des ensembles $C_{n-1} \cap A_n$, $C_{n-1} \cap B_n$ et $C_{n-1} \cap D_n$,

$$\begin{aligned} p(T = n) &= p(C_{n-1} \cap A_n) + p(C_{n-1} \cap B_n) + p(C_{n-1} \cap D_n) \\ &= [p(A_n/C_{n-1}) + p(B_n/C_{n-1}) + p(D_n/C_{n-1})] \times p(C_{n-1}) \\ &= \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right] \times \frac{1}{3^n} = \frac{2}{3^n}. \end{aligned}$$

I.2.3. On a

$$\sum_{k=1}^{n} p(T = k) = p(T \leq n) = 1 - p(T > n) = 1 - \frac{1}{3^n},$$

donc $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} p(T = k) = 1$. Il était possible de prévoir ce résultat en réalisant que la probabilité de l'événement $\{T > n\}$ devient de plus en plus faible et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. La compétition pourra vraisemblablement s'achever au bout d'un nombre fini d'épreuves...

I.2.4.1. L'égalité $p(T > n-1) = p(T = n) + p(T > n)$ est triviale puisque l'événement $(T > n-1)$ est la réunion disjointe des événements $(T = n)$ et $(T > n)$.

I.2.4.2. Le premier membre de l'égalité à démontrer vaut successivement

$$\begin{aligned}
\xi &= n.p\left(T>n\right)+\sum_{k=1}^{n}k.p\left(T=k\right)\\
&= n.p\left(T>n\right)+\sum_{k=1}^{n}k\left(p\left(T>k-1\right)-p\left(T>k\right)\right),\\
&= n.p\left(T>n\right)+\left(p\left(T>0\right)-p\left(T>1\right)\right)+2\left(p\left(T>1\right)-p\left(T>2\right)\right)\\
&\qquad +3\left(p\left(T>2\right)-p\left(T>3\right)\right)+...\\
&= n.p\left(T>n\right)+\left(p\left(T>0\right)+p\left(T>1\right)+p\left(T>2\right)+...+p\left(T>n-1\right)\right.\\
&\qquad \left.-np\left(T>n\right)\right)
\end{aligned}$$

soit

$$\xi=\sum_{k=0}^{n-1}p\left(T>k\right).$$

Remarque : C'est en écrivant in extenso la somme figurant dans ξ que l'on a pu la simplifier. Cela n'est pas indispensable, et l'on peut préférer conserver les symboles $\sum$ et utiliser un changement d'indexation. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}k.p\left(T=k\right) &= \sum_{k=1}^{n}k\left(p\left(T>k-1\right)-p\left(T>k\right)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}kp\left(T>k-1\right)-\sum_{k=1}^{n}kp\left(T>k\right)\\
&= \sum_{k'=0}^{n-1}\left(k'+1\right)p\left(T>k'\right)-\sum_{k=1}^{n}kp\left(T>k\right)
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}k.p\left(T=k\right) &= p\left(T>0\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\left(k+1\right)p\left(T>k\right)-\sum_{k=1}^{n-1}kp\left(T>k\right)\\
&\qquad -np\left(T>n\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}p\left(T>k\right)-np\left(T>n\right).
\end{aligned}$$

I.2.4.3. On a $p\left(T>k\right)=1/3^{k}$ (**I.2.2.2**). La question précédente permet

donc d'écrire

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k.p\,(T=k) &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} p\,(T>k)\right) - n.p\,(T>n)\\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3^k}\right) - \frac{n}{3^n} = \frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}} - \frac{n}{3^n}\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} k.p\,(T=k) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

Cela signifie que l'espérance de la variable aléatoire T est $3/2$, et l'on peut dire qu'en moyenne, la compétition prend fin au bout de $1,5$ tour, c'est-à-dire au premier ou au second tour.

II.1.1. L'événement A_{n+1} s'écrit comme la réunion disjointe des événements $A_{n+1}\cap A_n$, $A_{n+1}\cap B_n$, $A_{n+1}\cap C_n$ et $A_{n+1}\cap D_n$. La formule des probabilités totales donne alors

$$p\,(A_{n+1}) = p\,(A_{n+1}\cap A_n) + p\,(A_{n+1}\cap B_n) + p\,(A_{n+1}\cap C_n) + p\,(A_{n+1}\cap D_n)\,.$$

La formule des probabilités conditionnelles et (**I.1**) permettent ensuite d'écrire

$$\begin{aligned}p\,(A_{n+1}) &= p\,(A_{n+1}/A_n)\,p\,(A_n) + p\,(A_{n+1}/B_n)\,p\,(B_n)\\ &\qquad + p\,(A_{n+1}/C_n)\,p\,(C_n) + p\,(A_{n+1}/D_n)\,p\,(D_n)\\ &= \frac{2}{3}p\,(A_n) + \frac{1}{3}p\,(C_n) + p\,(A_{n+1}/D_n)\,p\,(D_n)\,.\end{aligned}$$

Comme $p\,(A_{n+1}/D_n)=0$ (en effet, si les deux compétiteurs sont éliminés au n-ième tour, il existe une probabilité nulle pour que le compétiteur A soit le seul à ne pas être éliminé au $(n+1)$-ième tour), on obtient

$$p\,(A_{n+1}) = \frac{2}{3}p\,(A_n) + \frac{1}{3}p\,(C_n)\,.$$

On recommence de la même façon :

$$\begin{aligned}p\,(B_{n+1}) &= p\,(B_{n+1}/A_n)\,p\,(A_n) + p\,(B_{n+1}/B_n)\,p\,(B_n)\\ &\qquad + p\,(B_{n+1}/C_n)\,p\,(C_n) + p\,(B_{n+1}/D_n)\,p\,(D_n)\\ &= \frac{1}{2}p\,(B_n) + \frac{1}{6}p\,(C_n)\,.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p\,(C_{n+1}) &= p\,(C_{n+1}/A_n)\,p\,(A_n) + p\,(C_{n+1}/B_n)\,p\,(B_n)\\ &\qquad + p\,(C_{n+1}/C_n)\,p\,(C_n) + p\,(C_{n+1}/D_n)\,p\,(D_n)\\ &= \frac{1}{3}p\,(C_n)\,.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(D_{n+1}) &= p(D_{n+1}/A_n)\,p(A_n) + p(D_{n+1}/B_n)\,p(B_n) \\ &\qquad + p(D_{n+1}/C_n)\,p(C_n) + p(D_{n+1}/D_n)\,p(D_n) \\ &= \frac{1}{3}p(A_n) + \frac{1}{2}p(B_n) + \frac{1}{6}p(C_n) + p(D_n)\,. \end{aligned}$$

La matrice de transition sera donc

$$M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}.$$

II.1.2. Par récurrence sur n. On a bien entendu $X_1 = MX_0$. Si la propriété est vraie au rang n, alors $X_n = M^n X_0$ et

$$X_{n+1} = MX_n = M\left(M^n X_0\right) = M^{n+1}X_0,$$

ce qui prouve la propriété au rang $n+1$.

II.2.1. On trouve

$$P\Delta P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

soit $P\Delta P = M$.

II.2.2. Puisque Δ est une matrice diagonale,

$$\Delta^n = \frac{1}{6^n}\begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix}.$$

II.2.3. On trouve $P^2 = I$ (où I désigne la matrice identité). Donc

$$M^n = (P\Delta P)(P\Delta P)\ldots(P\Delta P) = P\Delta P^2\Delta P^2\ldots P^2\Delta P = P\Delta^n P.$$

Après calculs

$$M^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{2}{3}\right)^n & 0 & \frac{2^n-1}{3^n} & 0 \\ 0 & 2^{-n} & 2^{-n}-3^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{-n} & 0 \\ 1-\left(\frac{2}{3}\right)^n & 1-2^{-n} & 1-\left(\frac{2}{3}\right)^n-2^{-n}+3^{-n} & 1 \end{pmatrix}.$$

II.3.1. Le produit $M^n X_0$ est égal à la troisième colonne de M^n puisque $X_0 = {}^t(0,0,1,0)$, et

$$\begin{pmatrix} p(A_n) \\ p(B_n) \\ p(C_n) \\ p(D_n) \end{pmatrix} = X_n = M^n X_0 = M^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2^n-1}{3^n} \\ 2^{-n} - 3^{-n} \\ 3^{-n} \\ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2^{-n} + 3^{-n} \end{pmatrix}.$$

II.3.2. On trouve

$$\lim_{n\to+\infty} p(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n-1}{3^n} = 0\,;\ \lim_{n\to+\infty} p(B_n) = \lim_{n\to+\infty} 2^{-n} - 3^{-n} = 0\,;$$

$$\lim_{n\to+\infty} p(C_n) = \lim_{n\to+\infty} 3^{-n} = 0\,;$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} p(D_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2^{-n} + 3^{-n}\right) = 1.$$

La probabilité $p(D_n)$ pour que les deux compétiteurs soient éliminés à l'issue de la n-ième épreuve tend ainsi vers 1 lorsque n ten vers $+\infty$. C'est prévisible, puisque l'on s'attend à ce que les deux compétiteurs soient éliminés au bout d'un nombre fini d'épreuves, ce qui garantit que le jeu finisse un jour ! Mais il s'agit seulement d'une limite : après tout, il est possible que l'un au moins des compétiteurs réussisse sempiternellement des tirs au but.

SECOND PROBLEME

1.1.1. et **1.1.2.** La fonction $f(x) = x^3 - 2x - 1/2$ est définie, continue et dérivable sur tout $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 3x^2 - 2$. Pour tout x,

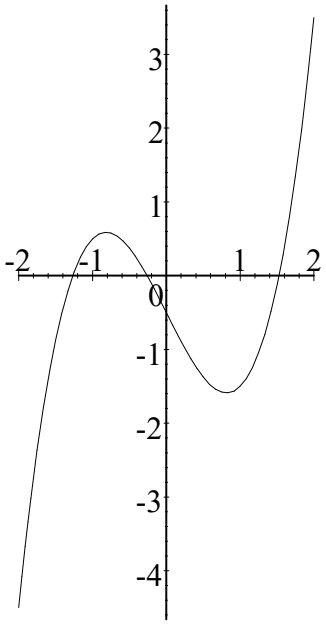
$$\frac{f(-x) + f(x)}{2} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{(-x) + x}{2} = 0,$$

donc les points de coordonnées $(x, f(x))$ et $(-x, f(-x))$ sont symétriques par rapport au point $I(0, -1/2)$.

Le point I est donc centre de symétrie de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f, et l'on peut limiter l'étude de f à $\mathbb{R}_+$.
On a $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, donc la courbe admet deux branches infinies.
On a $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, donc $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des y quand x tend vers $+\infty$.

Par symétrie, $\mathcal{C}$ admettra aussi une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des y quand x tend vers $-\infty$.

La dérivée s'annule en $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, et le tableau de variation est donné ci-dessous.



x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{2}{3}}$		0		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4}{9}\sqrt{6}-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{4}{9}\sqrt{6}-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

On a $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -\frac{4}{9}\sqrt{6}-\frac{1}{2} \simeq -1,59$ et $f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{4}{9}\sqrt{6}-\frac{1}{2} \simeq 0,59$.

1.1.3. Le tableau de variation de f montre qu'il existe deux solutions négatives et une solution positive de l'équation $f(x) = 0$.

1.2.1. On a

$$\begin{aligned}
\cos(3\alpha) &= \cos(\alpha+2\alpha) = \cos\alpha\cos(2\alpha) - \sin\alpha\sin(2\alpha) \\
&= \cos\alpha\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) - \sin\alpha\left(2\sin\alpha\cos\alpha\right) \\
&= \cos\alpha\left(2\cos^2\alpha - 1\right) - 2\left(1-\cos^2\alpha\right)\cos\alpha \\
&= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.
\end{aligned}$$

Remarque : On aurait pu aussi utiliser la formule de Moivre $e^{i3\alpha} = \left(e^{i\alpha}\right)^3$

et développer

$$\begin{aligned}\cos(3\alpha) &= \mathrm{Re}\left(e^{i3\alpha}\right) = \mathrm{Re}\left[(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3\right] \\ &= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha \\ &= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.\end{aligned}$$

1.2.2. On remplace dans (1) :

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow x^3 - 2x - \frac{1}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y\right)^3 - 2\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y\right) - \frac{1}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}y^3 - \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y - \frac{1}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow 4y^3 - 3y - \frac{3\sqrt{3}}{8\sqrt{2}} = 0. \qquad (2)\end{aligned}$$

1.2.3. On a $\frac{3\sqrt{3}}{8\sqrt{2}} \simeq 0,459 \in [0,1]$ et l'on sait que la fonction cosinus induit une bijection strictement décroissante de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$. L'existence et l'unicité de φ s'en déduit. La calculatrice donne

$$\varphi = \arccos\frac{3\sqrt{3}}{8\sqrt{2}} \simeq 1,093612601 \simeq 1,093$$

(à 10^{-3} près par défaut).

1.2.4.

$$\cos(3\alpha) = \cos(\varphi) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad 3\alpha = \pm\varphi + k2\pi.$$

1.2.5. En posant $y = \cos\alpha$ et $x = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y$, on trouve

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow 4y^3 - 3y = \frac{3\sqrt{3}}{8\sqrt{2}} \\ &\Leftrightarrow 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \cos\varphi \\ &\Leftrightarrow \cos(3\alpha) = \cos\varphi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad 3\alpha = \pm\varphi + k2\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad \alpha = \pm\frac{\varphi}{3} + k\frac{2\pi}{3}.\end{aligned}$$

Puisque $\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right)=\cos\left(-\frac{\varphi}{3}\right)$, $\cos\left(-\frac{\varphi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\varphi}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)$ et de la même manière $\cos\left(-\frac{\varphi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)$, on trouve

$$\begin{aligned}(1) \quad &\Leftrightarrow \quad y\in\left\{\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right),\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right),\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)\right\}\\ &\Leftrightarrow \quad x\in\left\{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right),\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right),\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)\right\}.\end{aligned}$$

Il suffit de remplacer φ par sa valeur approchée $1,093612601$ pour obtenir

$$x\in\{1.525687121,-1.267035098,-0.2586520224\}.$$

En écrivant des valeurs décimales approchées à 10^{-3} près par défaut, cela s'écrit

$$x\in\{1.525,-1.268,-0.259\}.$$

1.3.1. L'égalité $g_a(x)=f(x)+\left(\frac{1}{2}-a\right)$, vérifiée pour tout réel x, montre que la translation τ de vecteur $\overrightarrow{u}=(0,1/2-a)$ transforme le point $M(x,f(x))$ de $\mathcal{C}$ en le point $N(x,g_a(x))$ de $\mathcal{C}_a$.

1.3.2. La question précédente permet de déduire le tableau de variation de g_a de celui de f :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{2}{3}}$		0		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		$+\infty$
$g_a'(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
$g_a(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4}{9}\sqrt{6}-a$	$\searrow$	$-a$	$\searrow$	$-\frac{4}{9}\sqrt{6}-a$	$\nearrow$	$+\infty$

Ce tableau montre que :

a) Si $\frac{4}{9}\sqrt{6}-a<0$, i.e. si $\frac{4}{9}\sqrt{6}<a$, alors $g_a(x)=0$ possède une unique solution réelle positive. La règle de Descartes est vérifiée.

b) Si $\frac{4}{9}\sqrt{6}-a=0$, $g_a(x)=0$ possède deux solutions réelles, l'une positive.et l'autre négative.

c) Si $\frac{4}{9}\sqrt{6}-a>0$, $-\frac{4}{9}\sqrt{6}-a<0$ et $a>0$, i.e. si $0<a<\frac{4}{9}\sqrt{6}$, g_a possède deux racines négatives et une racine positive.

d) Si $a=0$, g_a possède une racine positive, une racine nulle et une racine négative.

e) Si $\frac{4}{9}\sqrt{6}-a>0$, $-\frac{4}{9}\sqrt{6}-a<0$ et $a<0$, i.e. si $-\frac{4}{9}\sqrt{6}<a<0$, g_a possède deux racines positives et une racine négative.

f) Si $a=-\frac{4}{9}\sqrt{6}$, g_a possède une racine négative et une seule racine positive.

g) Si $a>-\frac{4}{9}\sqrt{6}$, g_a possède une seule racine négative.

On vérifierait facilement que la règle de Descartes est satisfaite dans n'importe lequel des cas précédents.

2.1. Si $y = x - k$,

$$\begin{aligned}(3) &\Leftrightarrow a(y+k)^3 + b(y+k)^2 + c(y+k) + d = 0\\ &\Leftrightarrow ay^3 + (3ak+b)y^2 + \left(3ak^2 + c + 2bk\right)y + bk^2 + ak^3 + ck + d = 0,\end{aligned}$$

et il suffit de choisir $k = -\frac{b}{3a}$ pour que (3) s'écrive

$$y^3 + \frac{1}{a}\left(c - \frac{b^2}{3a}\right)y + \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3} = 0.$$

En conclusion

$$p = \frac{1}{a}\left(c - \frac{b^2}{3a}\right) \quad \text{et} \quad q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}.$$

2.2. Pour chacune des questions posées, on propose un polynôme sous sa forme factorisée (dans $\mathbb{R}$) et développée.

(1)	$(x+1)\left(x^2+x+1\right) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$
(2)	$(x-1)\left(x^2+x+1\right) = x^3 - 1$
(3)	$(x-1)(x-5)^2 = x^3 - 11x^2 + 35x - 25$
(4)	$(x-1)(x+5)^2 = x^3 + 9x^2 + 15x - 25$
(5)	$(x+1)(x+2)(x+7) = x^3 + 10x^2 + 23x + 14$
(6)	$(x+1)(x+2)(x-3) = x^3 - 7x - 6$

Vérifions seulement la règle de Descartes dans le cas (6). On note un seul changement de signe dans $P(x) = x^3 - 7x - 6$, et la règle assure qu'il y a moins d'une racine positive. C'est exact. On note par contre deux changements de signe dans $P(-x) = -x^3 + 7x - 6$, donc au plus deux racines négatives pour $P(x)$. C'est encore exact puisqu'il y en a deux, à savoir -1 et -2.

2.3.1. La fonction $g(x) = x^3 + px + q$ est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, de fonction dérivée $g'(x) = 3x^2 + p$. Cette dérivée s'annule en $\pm\sqrt{\frac{-p}{3}}$ si $p < 0$, en 0 si $p = 0$, et ne s'annule jamais si $p > 0$. Enfin $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$. On obtient deux types de tableaux de variations.

• **Type I** : Si $p < 0$,

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{-p}{3}}$		$\sqrt{\frac{-p}{3}}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\vert$	$\searrow$	$\vert$	$\nearrow$	$+\infty$

• **Type II** : Si $p \geq 0$,

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	p	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	q	$\nearrow$	$+\infty$

2.3.2. La fonction g est continue et $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$. Il existe donc deux réels A et B tels que d'une part $x > A$ entraîne $g(x) > 1$, et d'autre part $x < B$ entraîne $g(x) < -1$. A fortiori, il existe deux réels x_0 et x_1 tels que $x_0 < x_1$, $g(x_0) < -1$ et $g(x_1) > 1$. Le Théorème des valeurs intermédiaires montre l'existence de $c \in [x_0, x_1]$ tel que $g(c) = 0$.

2.3.3. Si $p > 0$, le tableau de Type **II** montre que g est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, de sorte que l'équation $g(x) = 0$ n'admette qu'une seule solution réelle x_1. Le tableau de variations montre aussi que $x_1 \leq 0$ si $q > 0$ et $x_1 \leq 0$ si $q \leq 0$. La règle de Descartes fonctionne : si $q > 0$, il n'y a pas de changement de signe donc au plus 0 racine positive, ce qui est vrai (il n'y en a pas !), par contre $g(-x) = -x^3 - px + q$ montre un changement de signe, donc moins d'une racine négative, et c'est x_1. L'autre cas où $q \leq 0$ se traite de même façon.

2.3.4. Si $p = 0$, le tableau est du Type **II** et g n'a qu'une racine réelle x_1 comme en (**2.3.3**). Les résultats de (**2.3.3**) conviennent encore.

2.3.5. On suppose $p < 0$ et l'on pose $x_1 = -\sqrt{\frac{-p}{3}}$ et $x_2 = \sqrt{\frac{-p}{3}}$. Le tableau de variation de g est du type **I**, et q représente l'ordonnée à l'origine de $g(x)$. Les variations de g permettent d'écrire ce qui suit (on tracera des allures de graphiques au brouillon).

• Si $q > 0$, g admet une seule racine négative, ou bien une racine négative et une ou deux racines positives. On dénombre deux changements de signes dans $g(x) = x^3 + px + q$, et un seul changement de signes dans $g(-x) = -x^3 - px + q$, soit moins d'une racine négative et moins de deux racines positives si l'on applique la règle de Descartes. Tout va bien.

• Si $q = 0$, g admet une racine nulle, une racine négative et une racine positive. On dénombre 1 changement de signes dans $g(x) = x^3 + px$, et 1 changement de signes dans $g(-x) = -x^3 - px$, soit moins d'une racine négative et moins d'une racine positive d'après la règle de Descartes. Celle-ci est donc encore vérifiée.

• Si $q < 0$, g n'admet aucune racine négative et une racine positive, ou bien une ou deux racines négatives et une racine positive. On compte un seul changement de signes dans $g(x) = x^3 + px + q$ et 2 changements de signes

dans $g(-x) = -x^3 - px + q$, donc a priori moins d'une racine positive et moins de 2 racines positives, ce qui est exact.

2.4. René Descartes, mathématicien et philosophe français du XVIIème siècle, fondateur du "rationalisme moderne", est à l'origine du repérage d'un point d'un plan par la donnée de deux nombres : l'abscisse x et l'ordonnée y. Les coordonnées (x, y) ainsi obtenues portent son nom : ce sont les coordonnées cartésiennes. Ce bouleversement permit de jeter un pont entre la géométrie grecque classique et l'algèbre. Une droite apparaît alors naturellement comme une équation affine, un cercle possède aussi une équation, etc.

Si François Viète a été le premier vers 1591 à représenter des nombres par des lettres, en notant les inconnues par des voyelles et les constantes par des consonnes, c'est Descartes qui a créé la notation algébrique moderne en utilisant les lettres x, y, z, pour les inconnues, et a, b, c, ... pour les constantes. On lui doit aussi la notation moderne des exposants positifs : x^2, x^3...

3.1.1. Un nombre réel x est un " nombre décimal" si et seulement si il existe un entier naturel k tel que $10^k x$ appartienne à $\mathbb{Z}$. Si $v = 2^m 5^p$, alors

$$10^{m+p} \times \frac{u}{v} = 2^p 5^m u \in \mathbb{Z}$$

donc u/v est décimal.
Réciproquement, si u/v est un nombre décimal, il existe un entier naturel k et un entier relatif s tels que $10^k u/v = s$, d'où $10^k u = vs$. Tout facteur premier p intervenant dans la décomposition de v divisera nécessairement $10^k u$, donc 10^k (d'après le Théorème de Gauss, et puisque v et premier avec u), et donc aussi 10 (c'est une propriété connue d'un nombre premier). Par suite $p = 2$ ou 5, et v s'écrit sous la forme $v = 2^m 5^p$ avec $m, p \in \mathbb{N}$.

3.1.2. $h(x) = x^3 - 5x + 2 = (x-2)\left(x^2 + 2x - 1\right)$ possède trois racines distinctes : 2 et $-1 \pm \sqrt{2}$. Seule $s = \sqrt{2} - 1$ appartient à l'intervalle $[0, 1]$.

3.1.3. Le tableau de signes de

$$h(x) = (x-2)\left(x - (-1-\sqrt{2})\right)\left(x - (-1+\sqrt{2})\right)$$

est facile à obtenir :

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		2		$+\infty$
$x-2$	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$		
x^2+2x-1	$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$		
$h(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		

Puisque $-1-\sqrt{2}<0<-1+\sqrt{2}<1<2$, on constate que, sur $[0,1]$, $h(x)$ est positive si $x<s$ et négative si $x>s$. Cela prouve l'affirmation de l'énoncé.

3.1.4.1. On a

$$\begin{cases} \forall n\in\mathbb{N} \quad a_n\leq a_{n+1} \text{ et } b_n\geq b_{n+1} \\ \lim(b_n-a_n)=0 \end{cases}$$

ce qui prouve que les deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, donc convergent vers la même limite l. L'affirmation $\lim(b_n-a_n)=0$ provient de la remarque

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{b_n-a_n}{2}=...=\frac{b_0-a_0}{2^{n+1}}$$

et du fait que $\frac{b_0-a_0}{2^{n+1}}$ tende vers 0 quand n tend vers $+\infty$. La limite l est égale à s : pour le voir, il suffit de noter que $h(a_n)\,h(b_n)\leq 0$ pour tout n, et de faire tendre n vers $+\infty$ dans cette inégalité. On obtient alors $(h(l))^2\leq 0$ d'où $h(l)=0$ puis $l=s$, la fonction h n'admettant qu'un seul zéro dans l'intervalle $[0,1]$).

3.1.4.2. Un encadrement de s d'amplitude 10^{-5} sera obtenu dès que

$$|b_n-a_n|=\frac{b_0-a_0}{2^n}\leq 10^{-5}.$$

Cela équivaut à $n\geq\frac{5\ln 10}{\ln 2}\simeq 16,61$. On peut prendre $n_0=17$.

3.1.4.3. Voici un exemple de programme de "Dichotomie" sur MuPad. Le critère d'arrêt est $\frac{b_0-a_0}{2^n}\leq 10^{-6}$ de façon à obtenir un encadrement par des nombres a et b dont les 5 premières décimales sont égales. L'algorithme nous donne alors la valeur approchée de s à 10^{-5} près par défaut.

Programme MuPad :

```
a :=0.0 : b :=1.0 : e :=0.000001 : n :=0 : h := x-> x^3-5*x+2 :
repeat
n :=n+1 : c :=(a+b)/2 :
if h(a)*h(c) <= 0 then b :=c else a :=c :end_if :
print(a,b) :
until b-a<e end_repeat :
print(Unquoted,"n = ".expr2text(n)) ;
print(Unquoted,"Un encadrement de s est [ ".expr2text(float(a))." ,
".expr2text(float(b))." ]") ;
```

Voici les résultats obtenus :

```
0.0, 0.5
```

0.25, 0.5
0.375, 0.5
0.375, 0.4375
0.40625, 0.4375
0.40625, 0.421875
0.4140625, 0.421875
0.4140625, 0.41796875
0.4140625, 0.416015625
0.4140625, 0.4150390625
0.4140625, 0.4145507812
0.4140625, 0.4143066406
0.4141845703, 0.4143066406
0.4141845703, 0.4142456055
0.4141845703, 0.4142150879
0.4141998291, 0.4142150879
0.4142074585, 0.4142150879
0.4142112732, 0.4142150879
0.4142131805, 0.4142150879
0.4142131805, 0.4142141342

n = 20

Un encadrement de s est [0.4142131805 , 0.4142141342]

La valeur approchée de s à 10^{-5} près par défaut est $0,41421$.

3.2.1. La fonction dérivée $k'(x) = 3x^2 - 2$ s'annule en $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ et le tableau de variations de $k(x) = x^3 - 2x - 5$ est

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{2}{3}}$		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		$+\infty$
$k'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$k(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	A	$\searrow$	B	$\nearrow$	$+\infty$

où $k\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{4}{9}\sqrt{6} - 5 \simeq -3,91$ et $k\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -\frac{4}{9}\sqrt{6} - 5 \simeq -6,09$. Le polynôme $k(x)$ n'admettra donc qu'une seule racine réelle σ, et celle-ci appartiendra à l'intervalle $]\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty[$.

3.2.2. La tangente à Γ en C admet l'équation $y = k'(c)(x - c) + k(c)$, soit

$$y = \left(3c^2 - 2\right)(x - c) + c^3 - 2c - 5,$$

donc $\psi(c)$ est solution de l'équation $\left(3c^2-2\right)(\psi(c)-c)+c^3-2c-5=0$. La tangente coupe l'axe des abscisses dès que $c \neq \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ et

$$\psi(c)=\frac{2c^3+5}{3c^2-2}.$$

3.2.3. Le tableau de variations de $k(x)$ montre que $k(c)>0$ dès que $c>\sigma$. Par ailleurs, $c>\sigma$ entraîne $c>\sqrt{\frac{2}{3}}$ donc $3c^2-2>0$, et l'on aura

$$0<\psi(c) \Leftrightarrow 0<2c^3+5 \qquad (*)$$

et

$$\psi(c)<c \Leftrightarrow 2c^3+5<c\left(3c^2-2\right) \Leftrightarrow 0<c^3-2c-5 \Leftrightarrow 0<k(c). \qquad (**)$$

Les inégalités $(*)$ et $(**)$ étant vraies, on déduit $0<\psi(c)<c$.

3.2.4. Fixons a. La formule de taylor-Young à l'ordre 3 donne

$$k(b)=k(a)+(b-a)k'(a)+\frac{(b-a)^2}{2}k''(a)+\frac{(b-a)^3}{6}k'''(a)+\xi(b).$$

où $\xi(b)=o\left((b-a)^3\right)$ est une fonction de b négligeable devant $(b-a)^3$ lorsque b tend vers a. Le polynôme $P(x)$ de degré inférieur ou égal à 3 défini par

$$P(b):=k(b)-\left[k(a)+(b-a)k'(a)+\frac{(b-a)^2}{2}k''(a)+\frac{(b-a)^3}{6}k'''(a)\right]$$

est donc négligeable devant $(b-a)^3$. C'est donc le polynôme nul d'après le Lemme ci-dessous, et l'on obtient bien

$$k(b)-k(a)=(b-a)k'(a)+\frac{(b-a)^2}{2}k''(a)+\frac{(b-a)^3}{6}k'''(a).$$

Lemme : Le seul polynôme $P(x)$ de degré $\leq n$ négligeable devant x^n lorsque x tend vers 0 est le polynôme nul.

Preuve du Lemme : Si $P(x)$ n'est pas nul, il existe un entier k compris entre 0 et n, tel que $a_k \neq 0$ et $P(x)=a_kx^k+...+a_nx^n$. L'hypothèse s'écrit

$$\lim_{x\to 0}\frac{P(x)}{x^n}=0. \qquad (\Subset)$$

On a

$$\frac{P(x)}{x^n}=\frac{x^k}{x^n}\left(a_k+a_{k+1}x+...+a_nx^{n-k}\right)=\frac{1}{x^{n-k}}\left(a_k+a_{k+1}x+...+a_nx^{n-k}\right)$$

mais aussi $\lim_{x\to 0}\left(a_k + a_{k+1}x + ... + a_n x^{n-k}\right) = a_k$, par conséquent $\frac{P(x)}{x^n}$ tend vers a_k si $k = n$, et vers $\pm\infty$ si $k < n$. Dans les deux cas on contredit (ↄ). ■

3.2.5. • On a $0 = k'(c)(\psi(c) - c) + k(c)$ donc $\psi(c) - c = -\frac{k(c)}{k'(c)}$. Ainsi

$$\psi(c) - \sigma = \psi(c) - c + (c - \sigma) = c - \sigma - \frac{k(c)}{k'(c)}.$$

Puisque $k(\sigma) = 0$, la formule de (**3.2.4**) donne

$$-k(c) = (\sigma - c)k'(c) + \frac{(\sigma - c)^2}{2}k''(c) + \frac{(\sigma - c)^3}{6}k'''(c)$$

ou encore

$$c - \sigma - \frac{k(c)}{k'(c)} = \frac{(\sigma - c)^2}{2k'(c)}k''(c) + \frac{(\sigma - c)^3}{6k'(c)}k'''(c)$$

c'est-à-dire

$$\psi(c) - \sigma = \frac{(\sigma - c)^2}{2k'(c)}k''(c) + \frac{(\sigma - c)^3}{6k'(c)}k'''(c).$$

L'étude de $k'(x) = 3x^2 - 2$ et de $k''(x) = 6x$ sur $[2; 2, 1]$ montre qu'il s'agit de fonctions strictement positives sur cet intervalle.
On remarque aussi que $k(2) = -1$ et donc que $2 < \sigma < c < 2, 1$. On a donc $k''(c) \leq M$ et $k'(c) \geq m$. Comme $\sigma - c \leq 0$, $\frac{(\sigma-c)^3}{6k'(c)}k'''(c)$ est négatif et l'égalité précédente entraîne

$$\psi(c) - \sigma \leq \frac{(\sigma - c)^2}{2k'(c)}k''(c) \leq \frac{M}{2m}(c - \sigma)^2. \qquad (♮)$$

• Comme $k''(x) = 6x$ est positive sur $[2; 2, 1]$, la fonction $k(x)$ est convexe et la pente de la sécante $[(\sigma, 0), (c, k(c))]$ sera inférieure à la pente de la tangente en $(c, k(c))$. Cela s'écrit

$$\frac{k(c)}{c - \sigma} \leq k'(c)$$

ou encore

$$0 \leq c - \sigma - \frac{k(c)}{k'(c)} = \psi(c) - \sigma \qquad (♭)$$

puisque $k'(c)$ est troujours strictement positif. (♮) et (♭) donnent l'encadrement

$$0 \leq \psi(c) - \sigma \leq \frac{M}{2m}(c - \sigma)^2.$$

Remarque : On a trouvé un meilleur encadrement que celui prédit par l'énoncé, et il est possible que l'on ait fait une erreur... On ne la trouve pas.

Quoiqu'il en soit, ce type d'encadrement convient pour montrer la convergence de la suite du (**3.2.6**) et la suite du problème n'est pas hypothéquée.

3.2.6. $c_1 = \psi(2) = \frac{21}{10} = 2,1$. D'après (**3.2.3**) et (**3.2.5**)

$$\sigma < c_2 = \psi(c_1) < c_1 = 2,1,$$

et une récurrence facile donne $\sigma < c_{n+1} = \psi(c_n) < c_n$ pour tout $n \geq 1$. La suite $(c_n)_{n\geq 1}$ est décroissante minorée par σ, donc converge. Posons $N = \frac{M}{2m}$. (**3.2.5**) entraîne

$$\begin{aligned} 0 \leq c_n - \sigma &\leq N(c_{n-1} - \sigma)^2 \leq N^{1+2}(c_{n-2} - \sigma)^4 \leq N^{1+2+2^2}(c_{n-3} - \sigma)^{2^3} \\ &\leq ... \leq N^{1+...+2^{n-2}}(c_1 - \sigma)^{2^{n-1}} \end{aligned}$$

donc

$$0 \leq c_n - \sigma \leq N^{2^{n-1}-1}(c_1 - \sigma)^{2^{n-1}} \leq \frac{1}{N}(0,1 \times N)^{2^{n-1}}.$$

Les fonctions $k'(x) = 3x^2 - 2$ et $k''(x) = 6x$ étant monotones sur l'intervalle $[2; 2,1]$, on trouve $m = k'(2) = 10$ et $M = k''(2,1) = 12,6$, donc

$$0,1 \times N = 0,1 \times \frac{12,6}{20} = 0,063.$$

Ainsi $0 \leq c_n - \sigma \leq \frac{1}{0,63} \times 0,063^{2^{n-1}}$. Puisque $\lim 0,063^{2^{n-1}} = 0$ on déduit $\lim(c_n - \sigma) = 0$, c'est-à-dire $\lim c_n = \sigma$.

3.2.7. On a $0 \leq c_n - \sigma \leq \frac{1}{0,63} \times 0,063^{2^{n-1}}$ et l'on obtient (après calculs) :

$$\frac{1}{0,63} \times 0,063^{2^{n-1}} \leq 10^{-8} \Leftrightarrow n \geq 1 + \frac{1}{\ln 2} \ln\left[\frac{\ln\left(0.63 \times 10^{-8}\right)}{\ln 0.063}\right] \simeq 3,7718.$$

Ainsi $\sigma \leq c_4 \leq \sigma + 10^{-8}$ et c_4 sera une valeur approchée de σ à 10^{-8} près. Voici un algorithme qui calcule les termes de la suite $(c_n)_n$:

Dans c mettre 2
Définir la fonction $\psi(c) = \frac{2c^3+5}{3c^2-2}$
  Début de la boucle : Pour n variant de 1 à 7, faire
    Dans c mettre $\psi(c)$
    Imprimer n et c
  Fin de la boucle

Et voici sa traduction avec MuPad en prenant une précision de 70 chiffres significatifs. La convergence est très rapide, et en fait beaucoup plus rapide que la majoration ne l'avait laissé croire.

```
DIGITS := 70 :
c :=2.0 : f := x -> (2*c^3+5)/(3*c^2-2) :
for n from 1 to 7 do
c :=f(c) : print(n,c) ;
end_for
```

On obtient :

1, 2.1
2, 2.09456812110418521816562778272484416740872662511130899376669634906500 4
3, 2.09455148169819930288382370354426586548066324555518470189979729934591 4
4, 2.09455148154232659149606484715371399546946124005854340780034084633722 3
5, 2.09455148154232659148238654057930296385741143677690558627189536380020 1
6, 2.09455148154232659148238654057930296385730610562823918030412852904531 2
7, 2.09455148154232659148238654057930296385730610562823918030412852904531 2

En conclusion, un valeur approchée qui répond à la question est $2,09455148$.

3.3. L'idée est de se placer "près" de la solution, puis de faire un petit accroissement (noté $x = 2+p$) pour tranformer l'équation en une équation de la variable p. On suppose que p est petit, ce qui permet de négliger les termes en p^2 ou p^3 et de ne retenir que la partie linéaire de l'équation polynomiale. Puis on fait un petit accroissement ($p = 0,1+q$) à partir de cette solution, et ainsi de suite.

Il y a effectivement un lien avec l'utilisation des tangentes vue en (**3.2**). Le changement de variable $x = 2+p$ et l'obtention de la nouvelle équation en p revient à écrire

$$k(2+p) = k(2) + k'(2)\,p + k''(2)\,\frac{p^2}{2!} + k'''(2)\,\frac{p^3}{3!} + o\left(p^3\right)$$

et ici $o\left(p^3\right)$ est la fonction nulle (**3.2.4**). Négliger les termes de degrés ≥ 2 revient à ne retenir que la tangente à la courbe représentative de k en 2 (et correspond à la partie linéaire du développement de Taylor). En effet, retenir l'équation

$$y = k(2) + k'(2)\,p$$

revient à s'intéresser à la droite d'équation

$$y = k(2) + k'(2)\,(x-2)$$

et l'on reconnaît la tangente en 2 à la courbe. Newton résout ensuite l'équation

$$k(2) + k'(2)\,(x-2) = 0,$$

ce qui revient exactement à chercher l'abscisse de l'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses ! Et c'est ce que nous avons fait en (**3.2**). Ensuite, Newton retient cette valeur ($p = 0,1$ dans l'exemple) et la ré-injecte dans l'équation avec un petit accroissement. Il s'intéresse donc à nouveau à l'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente en $x = 2 + 0,1$ (i.e. en $p = 0,1$) à la courbe, comme en (**3.2**) où nous devions calculer à nouveau $c_{n+1} = \psi(c_n)$. Il s'agit donc de la même méthode, mais présentée d'une autre manière.

Chapitre 3

Année 2004

3.1 Énoncé

PREMIER PROBLÈME

Le thème de ce problème est l'étude de la dérivation symétrique, et plus particulièrement de ses liens avec la dérivation « usuelle ».
Sauf mention contraire, les fonctions numériques envisagées dans ce problème sont supposées définies sur l'ensemble $\mathbb{R}$ *des nombres réels ou sur l'ensemble* $\mathbb{R}^*$ *des nombres réels non nuls.*

A toute fonction numérique f, définie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$, on associe les fonctions φ et ψ définies sur $\mathbb{R}^*$ respectivement par :

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} \quad \text{et} \quad \psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2x}.$$

a) On rappelle qu'une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, est dite dérivable en 0 lorsque la fonction associée φ admet une limite finie en 0 (notée $f'(0)$).

b) On donne maintenant la définition suivante : Une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{R}^*$, est dite *symétriquement dérivable en* 0 lorsque la fonction associée ψ admet une limite finie en 0 (notée $f'_s(0)$).

Ces notations seront utilisées dans toute la suite du problème.

Préambule

La fonction f étant définie sur $\mathbb{R}$, on note Γ sa courbe représentative dans un repère cartésien du plan, $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On appelle A, B, C, D, E les points de Γ d'abscisses respectives $0\,;\ -1\,;\ -0,5\,;\ 0,5\,;\ 1$.
Quelles relations peut-on établir entre les coefficients directeurs des six droites

(AB), (AC), (AD), (AE), (BE), (CD) et les valeurs des fonctions φ ou ψ en certains points de $\mathbb{R}^*$?
Donner une interprétation graphique de $\varphi(x)$ et de $\psi(x)$.

Première partie : étude de quelques exemples

1.1 **Exemple 1**. Dans cette question, on considère comme fonction f la fonction exponentielle de base e :

$$f : x \mapsto e^x.$$

1.1.1. On appelle Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1.1.1.1. Soient x_0 un réel quelconque et M_0 le point de Γ d'abscisse x_0. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la tangente à Γ en M_0 avec l'axe des abscisses. En déduire une construction de la tangente à Γ au point M_0.

1.1.1.2. Dessiner l'allure de la partie de Γ correspondant à l'intervalle $[-1; 1]$ (on prendra 5 cm pour mesurer les vecteurs unités). Sur le dessin, on représentera les tangentes à Γ aux points d'abscisses -1, 0 et 1.

1.1.2. Démontrer que la fonction ψ associée à f peut être définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\psi(x) = \frac{e^{2x} - 1}{2x} \times \frac{1}{e^x}.$$

En déduire que f est symétriquement dérivable en 0 et donner la valeur de $f'_s(0)$.

1.1.3. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, des valeurs à 10^{-3} près par défaut de $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ pour les valeurs de x appartenant à l'ensemble E :

$$E = \{-0,5\ ;\ -0,4\ ;\ -0,3\ ;\ -0,2\ ;\ -0,1\ ;\ 0,1\ ;\ 0,2\ ;\ 0,3\ ;\ 0,4\ ;\ 0,5\}.$$

On présentera les résultats dans un tableau.

1.2. **Exemple 2.** Dans cette question, la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, est une fonction affine :

$$f : x \mapsto f(x) = mx + p,$$

où m et p sont deux nombres réels. Pour cette fonction f, comparer $\varphi(x)$ et $\psi(x)$. Conclusion ?

1.3. **Exemple 3.** Dans cette question, la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, est une fonction polynôme dont le degré est au plus égal à 2 :

$$f : x \mapsto f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

où α, β, γ sont trois nombres réels.

1.3.1. Donner la valeur de $f'(0)$.

1.3.2. Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}^*$, on a $\psi(x) = f'(0)$. En déduire que f est symétriquement dérivable en 0 et donner la valeur de $f'_s(0)$. Comment le résultat précédent peut-il s'interpréter graphiquement ?

1.4. Pour chacun des exemples suivants, préciser si la fonction f est, ou non, dérivable en 0, et si elle est, ou non, symétriquement dérivable en 0.

1.4.1. **Exemple 4.** La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.

1.4.2. **Exemple 5.** La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = 1 \text{ si } x \geq 0 \\ f(x) = 0 \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

1.4.3. **Exemple 6.** La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} \text{ si } x \geq 0 \\ f(x) = -\sqrt{-x} \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

Deuxième partie : quelques résultats généraux

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$.

2.1.

2.1.1. Vérifier que, pour tout réel x non nul, on a :

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x) + \varphi(-x)\right).$$

Que peut-on en conclure quant à la parité de la fonction ψ ?

2.1.2. En déduire la *propriété 1* : Si la fonction f est dérivable en 0, alors elle est symétriquement dérivable en 0. Que peut-on alors dire de $f'_s(0)$ et $f'(0)$?

2.1.3. La réciproque de *propriété 1* est-elle vraie ?

2.2. Démontrer la *propriété 2* : Si la fonction f est paire, alors elle est symétriquement dérivable en 0.

2.3. Démontrer la *propriété 3* : Si la fonction f est impaire, alors elle est dérivable en 0 si, et seulement si, elle est symétriquement dérivable en 0.

2.4. Donner un exemple de fonction continue en 0, non symétriquement dérivable en 0.

2.5. Donner un exemple de fonction symétriquement dérivable en 0, non continue en 0.

Troisième partie : deux approximations de $f'(0)$ pour l'exponentielle népérienne

Dans toute cette partie, on considère comme fonction f la fonction exponentielle de base e :

$$f : x \mapsto e^x.$$

3.1. L'ensemble E est celui qui a été défini dans la question 1.1.3. de la première partie.

3.1.1. Déterminer les valeurs de x appartenant à l'ensemble E telles que $|\varphi(x) - f'(0)| \leq \varepsilon$, avec $\varepsilon = 0,1$. Même question avec $\varepsilon = 0,01$.

3.1.2. Déterminer les valeurs de x appartenant à l'ensemble E telles que $|\psi(x) - f'(0)| \leq \varepsilon$, avec $\varepsilon = 0,1$. Même question avec $\varepsilon = 0,01$.

3.2. Dans cette question, le réel x appartient à l'intervalle $I = [-0,5; 0,5]$.

3.2.1. On considère les fonctions α et β définies sur I respectivement par :

$$\alpha(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}e^{-0,5} \quad \text{et} \quad \beta(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}e^{0,5}.$$

Etudier les variations des fonctions α et β.

3.2.2. Démontrer que, pour tout réel x de I, on a :

$$1 + x + \frac{x^2}{2}e^{-0,5} \leq e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2}e^{0,5}.$$

En déduire que, pour tout réel x non nul de I, on a :

$$\left|\frac{e^x - 1}{x} - 1\right| \leq \frac{|x|}{2}e^{0,5}.$$

3.2.3. Par des méthodes analogues à celles utilisées dans la question précédente on démontre, pour tout réel x strictement positif de I, le résultat ci-après (que l'on admettra) :

$$\frac{x^2}{6}e^{-0,5} \leq \frac{e^x - e^{-x}}{2x} - 1 \leq \frac{x^2}{6}e^{0,5}.$$

Démontrer alors que, pour tout réel x non nul de I, on a :

$$\left|\frac{e^x - e^{-x}}{2x} - 1\right| \leq \frac{x^2}{6}e^{0,5}.$$

3.2.4. Déduire des questions précédentes un intervalle I_1 et un intervalle I_2 tels que, pour tout réel x non nul de I :

$$x \in I_1 \quad \Rightarrow \quad \left|\varphi(x) - f'(0)\right| \leq 10^{-2},$$

$$x \in I_2 \quad \Rightarrow \quad \left|\psi(x) - f'(0)\right| \leq 10^{-2}.$$

3.2.5. D'après les résultats obtenus à la question précédente, peut-on dire que la fonction ψ est « plus proche » de $f'(0)$ que la fonction φ ?
Si oui, préciser le sens donné à cette formulation.

Quatrième partie : caractérisation des fonctions polynômes de degré 1 ou 2

4.1. *Question préliminaire* : On considère deux réels a et b tels que $a < b$, et un réel x de l'intervalle $[a; b]$.

4.1.1. Démontrer qu'il existe un réel unique t de l'intervalle $[0; 1]$ tel que $x = (1-t)a + tb$.

4.1.2. On définit deux suites réelles (a_n) et (b_n) de la façon suivante :

(i) $a_0 = a$ et $b_0 = b$,

(ii) Pour tout entier n :

a. Si $x \in [a_n; \dfrac{a_n + b_n}{2}[$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$,

b. Sinon, on pose $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.

4.1.2.1. Écrire un algorithme permettant d'obtenir les termes successifs de ces deux suites.

4.1.2.2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on peut écrire a_n sous la forme

$$a_n = a + k_n \frac{b-a}{2^n},$$

où k_n est un entier vérifiant $0 \leq k_n < 2^n$.
En déduire l'écriture correspondante de b_n.

4.2. Dans cette question, on considère une fonction polynôme f de degré inférieur ou égal à 2, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, où α, β, γ sont trois nombres réels.
Soit Γ la représentation graphique de f dans un repère cartésien $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan.

4.2.1. Démontrer que, pour tout réel m et pour tout réel non nul x, on a :

$$\frac{f(m+x) - f(m-x)}{2x} = f'(m). \quad (1)$$

4.2.2. Interpréter graphiquement ce résultat.

4.3. Dans cette question, on considère une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$, qui vérifie pour tous réels λ et μ la relation :

$$\frac{f(\lambda) + f(\mu)}{2} = f\left(\frac{\lambda + \mu}{2}\right). \quad (2)$$

On se propose de démontrer que cette dernière relation caractérise les fonctions affines (c'est-à-dire les fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 1). Soient deux réels a et b tels que $a < b$ et un réel x de l'intervalle $[a; b]$. On se place dans les conditions de la question préliminaire et on reprend les mêmes notations.

4.3.1. Démontrer, que pour tout entier naturel n, on a :

$$f(a_n) = \left(1 - \frac{k_n}{2^n}\right) f(a) + \frac{k_n}{2^n} f(b).$$

4.3.2. En déduire que, pour tout réel $t \in [0; 1]$, on a :

$$f((1-t)a + tb) = (1-t) f(a) + t f(b),$$

puis démontrer la *propriété 4* : Soit f une fonction numérique définie et continue sur $\mathbb{R}$. Si, pour tous réels λ et μ, on a $\frac{f(\lambda)+f(\mu)}{2} = f\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right)$, alors f est une fonction affine.

4.3.3. Démontrer que la propriété ci-dessus est caractéristique des fonctions affines.

4.4. Dans cette question, on considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, qui vérifie pour tout réel m et tout réel non nul x la relation (1) :

$$\frac{f(m+x) - f(m-x)}{2x} = f'(m).$$

On se propose de démontrer que cette relation caractérise les fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

4.4.1. Démontrer que, pour tous réels m et x, on a :

$$\frac{f(m+x) - f(m-x)}{2x} = f'(m) \quad \text{et} \quad f'(m) = \frac{1}{2}\left[f'(m+x) + f'(m-x)\right].$$

4.4.2. Démontrer la *propriété 5* : Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Si, pour tout réel m et tout réel non nul x, on a $\frac{f(m+x)-f(m-x)}{2x} = f'(m)$, alors f est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

SECOND PROBLÈME

Pour tout ce problème, on se placera dans le plan affine euclidien réel $\mathcal{E}$. Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sera noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$.

Première partie : trois études préliminaires

1.1. *Cercle inscrit dans un losange.*

Définition 1 : On dit qu'un cercle γ est inscrit dans un quadrilatère $MNPQ$ (ou que le quadrilatère $MNPQ$ est circonscrit au cercle γ) si les côtés du quadrilatère sont tangents au cercle.

1.1.1. Soit $ABA'B'$ un losange du plan $\mathcal{E}$, de diagonales $[AA']$ et $[BB']$. Démontrer qu'il existe un cercle inscrit dans ce losange, et un seul. Préciser son centre.

1.1.2. Réciproquement, si l'on considère un cercle $\mathcal{C}$ quelconque du plan $\mathcal{E}$ et qu'on y circonscrit un parallélogramme, on se propose de démontrer que celui-ci est un losange.

1.1.2.1. Donner une démonstration (du niveau collège ou lycée, au choix) établissant le résultat classique suivant :

« Étant donné un point M dont la distance au centre d'un cercle donné est strictement supérieure au rayon de celui-ci, il existe deux tangentes distinctes au cercle passant par M. De plus, si V et V' désignent les points de contact de ces tangentes avec le cercle, on a $MV = MV'$. »

1.1.2.2. En déduire que, si l'on construit un parallélogramme circonscrit au cercle (construction dont on justifiera la possibilité), ce parallélogramme est un losange.

1.2. *Représentation paramétrique d'un cercle.* On considère, dans le plan euclidien $\mathcal{E}$ rapporté au repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, la courbe Γ de représentation paramétrique :

$$(1) \quad \begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\sin t \\ t \in]-\pi, \pi] \end{cases}$$

où R est un réel strictement positif. Démontrer que Γ n'est autre que le cercle de centre O et de rayon R.

1.3. *Étude d'une transformation* : Dans cette question, on se placera dans le cadre de la

Définition 2 : Soient, dans le plan euclidien $\mathcal{E}$, une droite d et un point O

de d, et soit un réel non nul k. On considère un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ dont d est l'axe des abscisses. On appelle affinité orthogonale d'axe d et de rapport k la transformation φ qui, à tout point M de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(x; y)$, associe le point $\varphi(M)$ de coordonnées $(x; ky)$.

1.3.1. Démontrer que φ est une bijection de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}$ et déterminer sa transformation réciproque φ^{-1}.

1.3.2. On considère une droite Δ, admettant l'équation $ax + by + c = 0$ dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1.3.2.1. Démontrer que $\varphi(\Delta)$ est une droite et que, si Δ coupe d en un point I, il en est de même de $\varphi(\Delta)$.

1.3.2.2. Soient M, N, P trois points distincts sur la droite Δ, et soit λ l'unique réel vérifiant : $\overrightarrow{MP} = \lambda\overrightarrow{MN}$. Soient M', N', P' les images respectives de M, N, P par φ. Démontrer qu'on a également : $\overrightarrow{M'P'} = \lambda\overrightarrow{M'N'}$.

1.3.3. Démontrer que les images par φ de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.

1.3.4. On considère la courbe $\mathcal{H}$ admettant dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ la représentation paramétrique suivante :

$$(2) \quad \begin{cases} x(t) = \alpha\cos(t) \\ y(t) = \beta\sin(t) \\ t \in]-\pi, \pi] \end{cases}$$

où α et β sont deux réels strictement positifs.
Toute courbe admettant, dans un repère orthonormal bien choisi, une représentation paramétrique de ce type est appelée ellipse.

1.3.4.1. Démontrer que l'origine O du repère est centre de symétrie pour $\mathcal{H}$ (ce point est appelé centre de l'ellipse $\mathcal{H}$).

1.3.4.2. Construire l'ellipse $\mathcal{H}$ dans le cas particulier où $\alpha = 2$ et $\beta = 1$ (on prendra 2 cm pour unité graphique).

Dans la fin de cette partie, on revient au cas général où α et β sont deux réels strictement positifs.

1.3.4.3. On suppose k strictement positif. Démontrer que $\varphi(\mathcal{H})$, image de $\mathcal{H}$ par φ, est une ellipse.

1.3.4.4. Même question lorsque k est strictement négatif.

1.3.4.5. L'ellipse $\varphi(\mathcal{H})$ peut-elle être un cercle ? Si oui, à quelles conditions ?

Deuxième partie : étude de deux conditions de contact d'une droite avec un cercle

Soient I un point du plan $\mathcal{E}$ et R un réel strictement positif. On considère le cercle $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}$, de centre I et de rayon R , et un diamètre $[GG']$ de $\mathcal{C}$. On appelle Δ et Δ' les tangentes à $\mathcal{C}$ respectivement en G et G'.

2.1. *Première condition de contact.*

Soit H un point de $\mathcal{C}$ distinct de G et G' ; la tangente T à $\mathcal{C}$ en H coupe les droites Δ et Δ' respectivement en P et P'.

2.1.1. Démontrer que le triangle IPP' est rectangle en I.

2.1.2. En déduire que l'on a la relation $\overline{HP} \times \overline{HP'} = -R^2$.

2.1.3. En déduire que l'on a la relation :

$$\overrightarrow{GP}.\overrightarrow{G'P'} = R^2. \quad \textit{(condition 1)}$$

2.2. *Problème réciproque.* Démontrer que, réciproquement, si deux points P et P' appartiennent respectivement aux tangentes Δ et Δ' et sont tels que $\overrightarrow{GP}.\overrightarrow{G'P'} = R^2$, alors la droite (PP') est tangente au cercle $\mathcal{C}$ (on pourra par exemple introduire un repère orthonormal $(I, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ tel que $\overrightarrow{u} = \frac{1}{R}\overrightarrow{IG}$.

2.3. *Seconde condition de contact.*

Nous venons de voir que la condition 1 caractérise les droites (PP') astreintes aux trois conditions :

(i) P appartient à Δ et est distinct de G ;

(ii) P' appartient à Δ' et est distinct de G' ;

(iii) (PP') est tangente au cercle $\mathcal{C}$.

Nous allons en déduire une seconde caractérisation de cette situation.

2.3.1. Soit A un point de Δ, distinct de G. Construire un losange $ABA'B'$, circonscrit au cercle $\mathcal{C}$, tel que B appartienne à Δ. Combien y a-t-il de solutions ?

2.3.2. On introduit un repère orthonormal $(I, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ tel que $\overrightarrow{u} = \frac{1}{R}\overrightarrow{IG}$.

2.3.2.1. On appelle a l'ordonnée du sommet A dans ce repère. Déterminer, en fonction de a et de R, les coordonnées des sommets A', B et B'.

2.3.2.2. En déduire que la droite (PP') est tangente à $\mathcal{C}$ si, et seulement si, on a la relation

$$R^2\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{P'A'} + a^2\overrightarrow{PB}.\overrightarrow{P'B'} = 0. \quad \textit{(condition 2)}$$

Troisième partie : étude d'une condition de contact d'une droite avec une ellipse

Le plan affine euclidien $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On considère l'ellipse $\mathcal{H}$ définie dans ce repère par la représentation paramétrique :

$$(2) \quad \begin{cases} x(t) = \alpha \cos(t) \\ y(t) = \beta \sin(t) \\ t \in]-\pi, \pi] \end{cases}$$

où α et β sont deux réels strictement positifs.

3.1. *Ellipse inscrite dans un parallélogramme*

3.1.1. Donner une équation cartésienne de la tangente à $\mathcal{H}$ au point M_0 correspondant à la valeur t_0 du paramètre t.

3.1.2. Démontrer qu'il existe un unique point M_1 de $\mathcal{H}$, distinct de M_0, tel que la tangente à $\mathcal{H}$ en M_1 soit parallèle à la tangente à $\mathcal{H}$ en M_0.

3.1.3. En généralisant la *définition 1*, on donne la

Définition 3 : On dit qu'une ellipse $\mathcal{H}$ est inscrite dans un quadrilatère $MNPQ$ (ou que le quadrilatère $MNPQ$ est circonscrit à l'ellipse $\mathcal{H}$) si les côtés du quadrilatère sont tangents à l'ellipse.

Déduire de ce qui précède qu'il existe une infinité de parallélogrammes circonscrits à une ellipse donnée.

3.2. *Reprise et prolongement de l'étude précédente*

On se propose maintenant d'affiner l'étude ci-dessus en transformant les résultats obtenus dans la deuxième partie à l'aide d'une affinité orthogonale.
Soit toujours l'ellipse $\mathcal{H}$ définie, dans le repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ par la représentation paramétrique (2) donnée au début de cette partie. On considère l'affinité orthogonale φ ayant pour axe l'axe des abscisses et pour rapport le réel $k = \beta/\alpha$.

3.2.1. On considère le cercle Γ de centre O et de rayon α.
Démontrer que l'image de Γ par φ est $\mathcal{H}$ et qu'une droite d est tangente au cercle Γ en un point M si et seulement si l'image $\varphi(d)$ de cette droite est tangente à $\mathcal{H}$ au point $\varphi(M)$.
On dit qu'un point est extérieur à $\mathcal{H}$ s'il est l'image par φ d'un point extérieur à Γ.
Déduire de ce qui précède que, par un point extérieur à $\mathcal{H}$, on peut mener deux droites qui lui sont tangentes.

3.2.2. Soit maintenant un parallélogramme $MNM'N'$ circonscrit à l'ellipse $\mathcal{H}$. Démontrer qu'il existe un unique losange $ABA'B'$ circonscrit au

cercle Γ dont l'image par φ est le parallélogramme $MNM'N'$.

3.2.3. Déduire de ce qui précède qu'une droite d, coupant respectivement les droites (MN) et $(M'N')$ en Q et Q', est tangente à l'ellipse $\mathcal{H}$ si, et seulement si, il existe un réel non nul a tel que :

$$\alpha^2\overrightarrow{QM}.\overrightarrow{Q'M'} + a^2\overrightarrow{QN}.\overrightarrow{Q'N'} = 0. \quad \textit{(condition 3)}$$

Quatrième partie : lieu des points « d'où l'on voit une ellipse suivant un angle droit » (Gaspard MONGE, 1746-1818)

On reprend l'ellipse $\mathcal{H}$ définie dans la partie 3 par la représentation paramétrique (2) dans le repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan affine euclidien réel $\mathcal{E}$.

4.1. Démontrer qu'un point M du plan $\mathcal{E}$, de coordonnées $(x; y)$, appartient à $\mathcal{H}$ si, et seulement si, on a la relation :

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

Cette équation est appelée équation réduite de $\mathcal{H}$ dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

4.2. *Points de contact avec $\mathcal{H}$ d'une droite passant par un point M donné.*
Soit M_0 un point donné de l'ellipse $\mathcal{H}$, de coordonnées $(x_0; y_0)$ dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, et soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$, de coordonnées $(x; y)$ dans ce même repère.

4.2.1. Démontrer que la droite (M_0M) est tangente à l'ellipse $\mathcal{H}$, et seulement si, les réels x, y vérifient le système :

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{xx_0}{\alpha^2} + \dfrac{yy_0}{\beta^2} = 1 \\ \left(\dfrac{xx_0}{\alpha^2} + \dfrac{yy_0}{\beta^2}\right)^2 = \dfrac{x_0^2}{\alpha^2} + \dfrac{y_0^2}{\beta^2}. \end{cases}$$

4.2.2. On suppose maintenant que la droite (M_0M) est tangente à $\mathcal{H}$ et admet un coefficient directeur de la forme $1/q_0$ (avec $q_0 \neq 0$).

4.2.2.1. Exprimer q_0 en fonction de α, β, x_0, y_0.

4.2.2.2. En déduire que q_0 vérifie l'équation d'inconnue Q :

$$(4) \quad (\beta^2 - y^2)Q^2 + 2xyQ + (\alpha^2 - x^2) = 0$$

4.2.2.3. Interpréter géométriquement les deux cas suivants :

- l'équation (4) admet deux racines réelles distinctes ;

- l'équation (4) admet une racine réelle double.

4.3 . Déduire de l'étude précédente que le lieu des points par lequel passent deux tangentes perpendiculaires à l'ellipse $\mathcal{H}$ est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.
On notera ω ce cercle (appelé cercle orthoptique de l'ellipse $\mathcal{H}$).

4.4. Soit t une tangente quelconque à l'ellipse $\mathcal{H}$.

4.4.1. Démontrer que t coupe le cercle ω en deux points distincts, que l'on notera J et L.

4.4.2. On désigne par J' et L' les symétriques respectifs de J et L par rapport au point O. Démontrer que le quadrilatère $JLJ'L'$ est un rectangle circonscrit à l'ellipse $\mathcal{H}$ et inscrit dans le cercle ω.

3.2 Corrigé

PREMIER PROBLÈME

Préambule

La pente de (AB) est $\frac{f(-1)-f(0)}{-1}$, et l'on reconnaît $\varphi(-1)$. Les pentes des droites (AC), (AD), (AE), (BE), (CD) sont respectivement égales à $\varphi(-0,5)$, $\varphi(0,5)$, $\varphi(1)$, $\psi(1)$ et $\psi(0,5)$.
$\varphi(x)$ est la pente de la droite (AM) où M est le point de Γ d'abscisse x, tandis que $\psi(x)$ représente la pente de la droite (MM') où M et M'sont les points de Γ d'abscisses x et $-x$.

Première partie : étude de quelques exemples

1.1 1.1. La tangente à Γ en M_0 admet l'équation $y = e^{x_0}(x-x_0)+e^{x_0}$, donc coupe (Ox) en un point d'abscisse x_T vérifiant $0 = e^{x_0}(x_T - x_0) + e^{x_0}$. On obtient $x_T = x_0 - 1$. Il suffit donc de relier le point M_0 au point de coordonnées $(x_0-1, 0)$ sur l'axe des abscisses pour obtenir la tangente à Γ en M_0.

1.1 1.2. Voir FIG. 3.1.

1.1 2.

$$\psi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \frac{(e^{2x}-1)e^{-x}}{2x} = \frac{e^{2x}-1}{2x} \times \frac{1}{e^x}.$$

Comme $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{2x} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$ et $\lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x} = 1$, la limite de $\psi(x)$ existe quand x tend vers 0, et $\lim_{x\to 0} \psi(x) = 1\times 1 = 1$. Cela prouve que f est symétriquement dérivable en 0 et que $f'_s(0) = 1$.

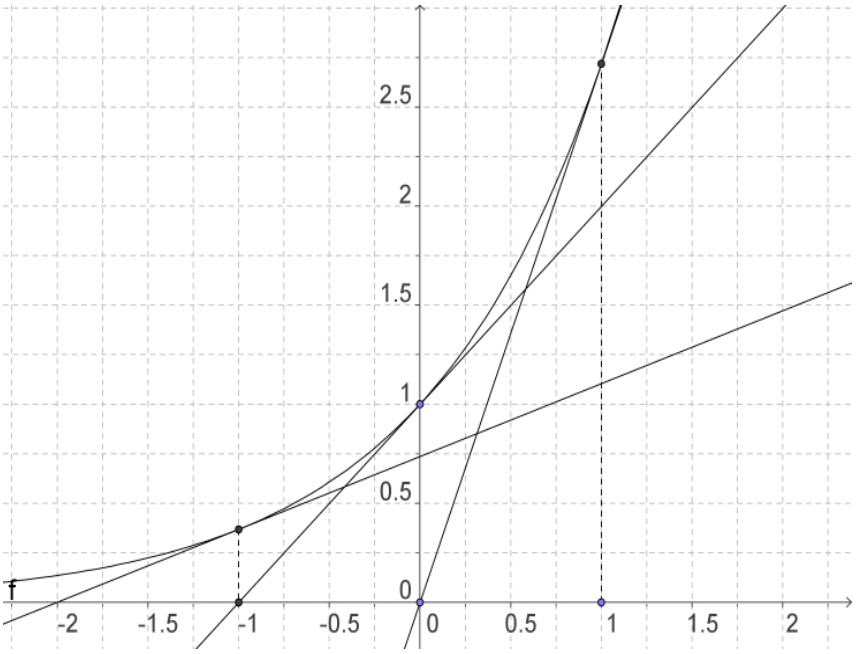


FIG. 3.1 – Trois tangentes à la courbe représentative de la fonction e^x

1.1 3.

x	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
φ(x)	0,786	0,824	0,863	0,906	0,951	1,051	1,107	1,166	1,229	1,297
ψ(x)	1,042	1,026	1,015	1,006	1,001	1,001	1,006	1,015	1,026	1,042

1.2. Pour tout réel x,

$$\varphi(x) = \frac{(mx+p)-p}{x} = m \quad \text{et} \quad \psi(x) = \frac{(mx+p)-(-mx+p)}{2x} = m.$$

Comme on peut s'y attendre en regardant le graphe d'une fonction affine, qui est une droite, φ et ψ sont des fonctions constantes et égales. f est dérivable en 0 et symétriquement dérivable en 0, et l'on a $f'(0) = f'_s(0) = m$.

1.3.1. $f'(x) = 2\alpha x + \beta$ donc $f'(0) = \beta$.

1.3.2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\psi(x) = \frac{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)-(\alpha x^2-\beta x+\gamma)}{2x} = \beta = f'(0).$$

Ainsi $\lim_{x\to 0}\psi(x)=\beta=f'(0)$, et f est symétriquement dérivable en 0. On a $f'_s(0)=f'(0)=\beta$.
L'égalité $\psi(x)=\beta=f'(0)$ peut se traduire en disant que, sur la repésentation graphique d'une parabole Γ, toute sécante passant par les points de Γ d'abscisses x et $-x$ reste parallèle à la tangente à Γ au point de Γ d'abscisse 0.

1.4.1. Si $f(x)=|x|$, le quotient $\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{|x|}{x}$ vaut ± 1 suivant le signe de x, donc tend vers $+1$ (resp. -1) lorsque x tend vers 0 par valeurs positives (resp. négatives). f n'est pas dérivable en 0. Par contre

$$\forall x\in\mathbb{R}^* \quad \frac{f(x)-f(-x)}{2x}=\frac{|x|-|-x|}{2x}=0$$

montre que $\lim_{x\to 0}\psi(x)=0$, donc que f est symétriquement dérivable en 0 et $f'_s(0)=0$.

Remarque : De la même manière, toute fonction paire sera symétriquement dérivable en 0, et de "dérivée symétrique" nulle en ce point.

1.4.2. Ici

$$\varphi(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x}=\begin{cases}0 & \text{si } x>0\\ -1/x & \text{si } x<0\end{cases}$$

donc $\lim_{x\to 0_-}\varphi(x)=+\infty$ et f n'est pas dérivable en 0. D'autre part

$$\psi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2x}=\begin{cases}\dfrac{1}{2x} \text{ si } x>0\\ -\dfrac{1}{2x} \text{ si } x<0\end{cases}$$

donc $\lim_{x\to 0}\psi(x)=+\infty$ et f n'est pas symétriquement dérivable en 0.

1.4.3. On a

$$\varphi(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x>0\\ \dfrac{-\sqrt{-x}}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{-x}} & \text{si } x<0\end{cases}$$

et

$$\psi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2x}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x}}{2x}=\dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x>0\\ \dfrac{-\sqrt{-x}-\sqrt{-x}}{2x}=\dfrac{1}{\sqrt{-x}} & \text{si } x<0,\end{cases}$$

donc f n'est ni dérivable en 0, ni symétriquement dérivable en 0.

Deuxième partie : quelques résultats généraux

2.1.1.

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \frac{f(x)-f(-x)}{2x} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}+\frac{f(0)-f(-x)}{x}\right)=\frac{1}{2}\left(\varphi(x)+\varphi(-x)\right)\end{aligned}$$

donc $\psi(x)=\psi(-x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, et cela prouve que ψ est une fonction paire.

2.1.2. Si f est dérivable en 0, il existe $l\in\mathbb{R}$ tel que $\lim_{x\to 0}\varphi(x)=l$, et $l=f'(0)$, et

$$\lim_{x\to 0}\psi(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\left(\varphi(x)+\varphi(-x)\right)\right)=\frac{1}{2}(2l)=l=f'(0).$$

Ainsi f est symétriquement dérivable en 0 et $f'_s(0)=f'(0)$.

2.1.3. La réciproque est fausse, comme le montre l'exemple 4 du 1.4.1. Toute fonction paire est symétriquement dérivable en 0 sans être forcément dérivable en 0, comme on le voit avec la fonction $x\mapsto|x|$.

2.2. On l'a déjà dit à la remarque de la question 1.4.1. Si f est paire,

$$\forall x\in\mathbb{R}^*\quad \psi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2x}=0$$

donc $\lim_{x\to 0}\psi(x)=0$ et f est bien symétriquement dérivable en 0, de dérivée symétrique $f'_s(0)=0$.

2.3. Si f est impaire, il faut montrer l'équivalence :

$$f \text{ dérivable en } 0 \quad\Leftrightarrow\quad f \text{ symétriquement dérivable en } 0.$$

Le sens direct ($\Rightarrow$) a été prouvé en 2.1.2. Réciproquement, si f est symétriquement dérivable en 0,

$$\psi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2x}=\frac{f(x)}{x}$$

tend vers $f'_s(0)$ quand x tend vers 0. Comme

$$\varphi(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{x\psi(x)}{x}=\psi(x),$$

on déduit $\lim_{x\to 0}\varphi(x)=\lim_{x\to 0}\psi(x)=f'_s(0)$, donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=f'_s(0)$.

2.4. La fonction de la question 1.4.3 est continue en 0 sans être symétriquement dérivable en 0.

2.5. Soient a et b deux réels, avec $b \neq 0$. La fonction f définie en posant $f(0) = 0$ et $f(x) = ax + b$ si $x \in \mathbb{R}^*$, est symétriquement dérivable en 0 sans être continue en 0 puisque sa représentation graphique est formée de l'origine du repère et d'une droite épointée du point de coordonnées $(0, b)$.

Troisième partie : deux approximations de $f'(0)$ pour l'exponentielle népérienne

3.1.1. On a $\varphi(x) - f'(0) = \dfrac{e^x - 1}{x} - 1$.

Si $\varepsilon = 0,1$, l'ensemble cherché est $\{-0,2\ ;\ -0,1\ ;\ 0,1\}$.
Si $\varepsilon = 0,01$, l'ensemble cherché est vide.

3.1.2. On a $\psi(x) - f'(0) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2x} - 1$.

Si $\varepsilon = 0,1$, l'ensemble cherché est E en entier.
Si $\varepsilon = 0,01$, l'ensemble cherché est $\{-0,2\ ;\ -0,1\ ;\ 0,1\ ;\ 0,2\}$.

3.2.1. Les fonctions α et β sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, de premières dérivées :

$$\begin{cases} \alpha'(x) = e^x - 1 - xe^{-0,5} \\ \alpha''(x) = e^x - e^{-0,5} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \beta'(x) = e^x - 1 - xe^{-0,5} \\ \beta''(x) = e^x - e^{0,5} \end{cases}$$

Pout tout $x \in I$, $\alpha''(x) \geq 0$ et $\beta''(x) \leq 0$, donc α' et β' sont respectivement croissante et décroissante sur I. Comme $\alpha(0) = \beta(0) = \alpha'(0) = \beta'(0) = 0$, on obtient les tableaux de variations suivants :

x	$-0,5$		0		$0,5$
$\alpha'(x)$		$-$	0	$+$	
$\alpha(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

x	$-0,5$		0		$0,5$
$\beta'(x)$		$+$	0	$-$	
$\beta(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

3.2.2. Les tableaux de variations ci-dessus montent que $\alpha(x)$ (resp. $\beta(x)$) est positif (resp. négatif) pour tout $x \in I$, ce qui prouve les deux premières inégalités :

$$1 + x + \frac{x^2}{2}e^{-0,5} \leq e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2}e^{0,5}.$$

On en déduit

$$\frac{x^2}{2}e^{-0,5} \leq e^x - x - 1 \leq \frac{x^2}{2}e^{0,5}$$

soit

$$\frac{|x|}{2}e^{-0,5} \leq \frac{e^x - x - 1}{|x|} \leq \frac{|x|}{2}e^{0,5}$$

pour tout $x \in I$. Par conséquent

$$\forall x \in I \quad \left|\frac{e^x - 1}{x} - 1\right| \leq \frac{|x|}{2}e^{0,5}.$$

3.2.3. Puisque $\frac{e^x - e^{-x}}{2x} - 1$ est compris entre 0 et $\frac{x^2}{6}e^{0,5}$, on a bien

$$\left|\frac{e^x - e^{-x}}{2x} - 1\right| \leq \frac{x^2}{6}e^{0,5}.$$

3.2.4. Les deux questions précédentes montrent que pour tout $x \in I$, on a les inégalités $|\varphi(x) - f'(0)| \leq \frac{|x|}{2}e^{0,5}$ et $|\psi(x) - f'(0)| \leq \frac{x^2}{6}e^{0,5}$. Pour avoir $|\varphi(x) - f'(0)| \leq 10^{-2}$, il suffira donc d'avoir

$$\frac{|x|}{2}e^{0,5} \leq 10^{-2},$$

c'est-à-dire $|x| \leq 2 \times 10^{-2}e^{-0,5}$. De même, pour avoir $|\psi(x) - f'(0)| \leq 10^{-2}$ il suffira d'avoir

$$\frac{x^2}{6}e^{0,5} \leq 10^{-2},$$

ce qui s'écrit $|x| \leq \sqrt{6e^{-0,5}} \times 10^{-1}$. On peut donc prendre :

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[-2 \times 10^{-2}e^{-0,5}, 2 \times 10^{-2}e^{-0,5}\right] \simeq [-0,012131\ ;\ 0,012131] \\ \text{et } I_2 &= [-\sqrt{6e^{-0,5}} \times 10^{-1}, \sqrt{6e^{-0,5}} \times 10^{-1}] \simeq [-0,19077\ ;\ 0,19077]. \end{aligned}$$

3.2.5. Le fait que I_1 soit inclus dans I_2 ne permet pas de dire que ψ est une meilleure approximation de $f'(0) = 1$ que φ, puisque les intervalles I_1 et I_2 que l'on a obtenus ne sont pas formés des points x tels que $|\varphi(x) - f'(0)| \leq 10^{-2}$ ou $|\psi(x) - f'(0)| \leq 10^{-2}$, selon le cas. On le voit bien : la question 3.1 montre que $|\psi(-0,2) - f'(0)| \leq 10^{-2}$ bien que $-0,2 \notin I_2$. C'est normal : les encadrements obtenus à la question 3.2.4 l'ont été en "perdant des informations", en utilisant des majorations dont on ne sait pas si elles sont larges ou pas.
Par contre, la question 3.2.2 donne la minoration

$$\forall x \in I \qquad \frac{|x|}{2}e^{-0,5} \leq \left|\varphi(x) - f'(0)\right|$$

et permet d'écrire

$$\forall x \in I \backslash \{0\} \qquad \frac{|\psi(x) - f'(0)|}{|\varphi(x) - f'(0)|} \leq \frac{\frac{x^2}{6}e^{0,5}}{\frac{|x|}{2}e^{-0,5}} = \frac{e}{3}|x|.$$

Ainsi

$$\lim_{x\to 0}\frac{|\psi(x)-f'(0)|}{|\varphi(x)-f'(0)|}=0$$

lorsque x tend vers 0, et l'on peut dire que $\psi(x)$ converge plus vite vers $f'(0)$ que $\varphi(x)$. Cela peut être dit en terme de suites : si l'on considère par exemple les suites $(\varphi(1/n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\psi(1/n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui convergent toutes deux vers $f'(0)$, avoir

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|\psi(1/n)-f'(0)|}{|\varphi(1/n)-f'(0)|}=0$$

signifie que la suite $(\psi(1/n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge plus rapidement vers $f'(0)$ que la suite $(\varphi(1/n))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Quatrième partie : caractérisation des fonctions polynômes de degré 1 ou 2

4.1.1. Comme $b-a\neq 0$,

$$x=(1-t)a+tb \quad\Leftrightarrow\quad t=\frac{x-a}{b-a}.$$

4.1.2.1. Voici un algorithme permettant de calculer les $N+1$ premiers termes des suites (a_n) et (b_n) :

Lire a, b, x, N
$n=0$
Tant que $n<N$, faire :
  Début
  $n\leftarrow n+1$
  Si $a\leq x<\dfrac{a+b}{2}$ alors $b\leftarrow\dfrac{a+b}{2}$, sinon $a\leftarrow\dfrac{a+b}{2}$
  Afficher n, a, b
  Fin
Fin

4.1.2.2. *Première solution* : On montre que la propriété

$H(n)$ « Il existe $k_n\in\mathbb{N}$ tels que $k_n\in[0,2^n[$,

$$a_n=a+k_n\frac{b-a}{2^n} \text{ et } b_n=a+(k_n+1)\frac{b-a}{2^n} \text{ »}$$

est vraie en raisonnant par récurrence sur n. $H(0)$ est triviale car $a_0=a$ et $b_0=b$ permet de prendre $k_0=0$. Si $H(n)$ est vraie, alors deux cas se présentent :

⋆ Ou bien $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$, et dans ce cas

$$a_{n+1} = a_n = a + k_n \frac{b-a}{2^n} = a + (2k_n)\frac{b-a}{2^{n+1}}$$

et

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a + k_n\frac{b-a}{2^n} + a + (k_n+1)\frac{b-a}{2^n}\right) = a + (2k_n+1)\,\frac{b-a}{2^{n+1}}$$

sont de la forme voulue.

⋆ Ou bien $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$, et on obtient

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a + k_n\frac{b-a}{2^n} + a + (k_n+1)\frac{b-a}{2^n}\right) = a + (2k_n+1)\,\frac{b-a}{2^{n+1}}$$

$$\text{et} \qquad b_{n+1} = b_n = a + (k_n+1)\frac{b-a}{2^n} = a + 2(k_n+1)\frac{b-a}{2^{n+1}}$$

avec $0 \leq 2k_n + 1 \leq 2\left(2^n - 1\right) + 1 < 2^{n+1}$.

Deuxième solution[1] : Par construction, a_n et b_n appartiennent à la subdivision de l'intervalle $[a, b]$ de pas $\frac{b-a}{2^n}$, et a_n n'est jamais égal à b. Il existe donc $k_n \in \mathbb{N} \cap [0, 2^n[$ tel que $a_n = a + k_n\frac{b-a}{2^n}$.

Comme $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ (cela se vérifie facilement par récurrence) on obtient

$$b_n = a_n + \frac{b-a}{2^n} = a + (k_n+1)\,\frac{b-a}{2^n}.$$

4.2.1.

$$\begin{aligned} f(m+x) - f(m-x) &= \alpha\left[(m+x)^2 - (m-x)^2\right] + \beta\left[(m+x) - (m-x)\right] \\ &= (4\alpha m + 2\beta)\,x \end{aligned}$$

donc

$$\frac{f(m+x) - f(m-x)}{2x} = 2\alpha m + \beta = f'(m).$$

4.2.2. L'égalité précédente montre que, sur la représentation graphique Γ de f, et pour tout $m \in \mathbb{R}$, toute sécante passant par les points de Γ d'abscisses $m + x$ et $m - x$ reste parallèle à la tangente à Γ au point de Γ d'abscisse m (FIG. 3.2).

[1] Ces affirmations sont présentées comme évidentes, ce qui se comprend puisqu'on passe d'un rang n au suivant "en divisant par 2" l'intervalle $[a_n, b_n]$. Si on devait les démontrer rigoureusement, on serait amené à formuler un raisonnement par récurrence .

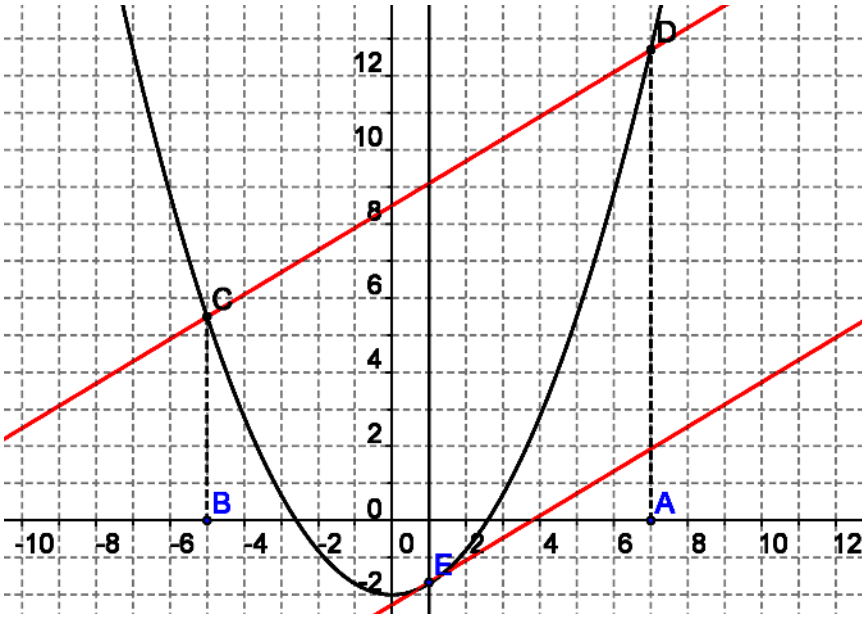


FIG. 3.2 – Question 4.2.2 : Interprétation graphique

4.3.1. *Première solution* : On montre que la propriété

$$H'(n) : \quad \begin{cases} f(a_n) = \left(1 - \dfrac{k_n}{2^n}\right) f(a) + \dfrac{k_n}{2^n} f(b) \\ f(b_n) = \left(1 - \dfrac{k_n + 1}{2^n}\right) f(a) + \dfrac{k_n + 1}{2^n} f(b) \end{cases}$$

est vraie par récurrence sur n. La propriété $H'(0)$ est triviale puisque $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $k_0 = 0$. Si $H(n)$ est vraie, deux cas se présentent :

$\star$ Ou bien $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, et dans ce cas on a vu que $k_{n+1} = 2k_n$ (Question 4.1.2.2). Alors

$$f(a_{n+1}) = f(a_n) = \left(1 - \frac{k_{n+1}}{2^{n+1}}\right) f(a) + \frac{k_{n+1}}{2^{n+1}} f(b)$$

et la propriété (2) permet d'écrire

$$\begin{aligned} f(b_{n+1}) &= f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[f(a_n)+f(b_n)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{k_n}{2^n}\right)f(a)+\frac{k_n}{2^n}f(b)+\left(1-\frac{k_n+1}{2^n}\right)f(a)+\frac{k_n+1}{2^n}f(b)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(2-\frac{2k_n+1}{2^n}\right)f(a)+\frac{2k_n+1}{2^n}f(b)\right] \\ &= \left(1-\frac{k_{n+1}+1}{2^{n+1}}\right)f(a)+\frac{k_{n+1}+1}{2^{n+1}}f(b). \end{aligned}$$

⋆ Ou bien $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1}=b_n$. Dans ce cas $k_{n+1}=2k_n+1$ (Question 4.1.2.2) et le même genre de calculs que ci-dessus permet d'obtenir les égalités voulues au rang $n+1$.
La propriété $H'(n)$ est donc bien démontrée par récurrence sur n.

Deuxième solution : On démontre la propriété $H''(n)$ suivante

$$\begin{aligned} H''(n): \quad & \text{Pour tout entier } p \text{ tel que } 0\le p<2^n, \\ & f\left(\left(1-\frac{p}{2^n}\right)a+\frac{p}{2^n}b\right)=\left(1-\frac{p}{2^n}\right)f(a)+\frac{p}{2^n}f(b), \end{aligned}$$

qui est plus forte que celle demandée, par récurrence sur n. Clairement, $H''(0)$ est vraie. Si $H''(n)$ est vraie, soit q un entier tel que $0\le q<2^{n+1}$.

⋆ Si q est pair, on a

$$f\left(\left(1-\frac{q}{2^{n+1}}\right)a+\frac{q}{2^{n+1}}b\right)=\left(1-\frac{q}{2^{n+1}}\right)f(a)+\frac{q}{2^{n+1}}f(b)$$

par simple application de la propriété au rang n.

⋆ Si q est impair, on écrit $q=2p+1$ avec $0\le p<2^n$, et on calcule

$$\begin{aligned} A &= f\left(\left(1-\frac{q}{2^{n+1}}\right)a+\frac{q}{2^{n+1}}b\right) \\ &= f\left(\left(1-\frac{2p+1}{2^{n+1}}\right)a+\frac{2p+1}{2^{n+1}}b\right) \\ &= f\left(\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{p}{2^n}\right)a+\frac{p}{2^n}b+\left(1-\frac{p+1}{2^n}\right)a+\frac{p+1}{2^n}b\right]\right). \end{aligned}$$

D'après (2) :

$$A=\frac{1}{2}\left[f\left(\left(1-\frac{p}{2^n}\right)a+\frac{p}{2^n}b\right)+f\left(\left(1-\frac{p+1}{2^n}\right)a+\frac{p+1}{2^n}b\right)\right],$$

et en appliquant l'hypothèse récurrente au rang n :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{p}{2^n}\right)f(a)+\frac{p}{2^n}f(b)+\left(1-\frac{p+1}{2^n}\right)f(a)+\frac{p+1}{2^n}f(b)\right] \\ &= \left(1-\frac{q}{2^{n+1}}\right)f(a)+\frac{q}{2^{n+1}}f(b). \end{aligned}$$

La propriété $H''(n)$ est donc démontrée au rang $n+1$.

4.3.2. • Si $t \in [0,1]$, posons $x = (1-t)a + tb$. Le nombre x appartient à l'intervalle $[a,b]$, et on peut construire les suites (a_n) et (b_n) comme on l'a fait dans la question 4.1.2. Il est facile de voir que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et convergent vers x. En effet :

a) (a_n) croît tandis que (b_n) décroît,

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$,

c) $\lim(b_n - a_n) = \lim \frac{b-a}{2^n} = 0$.

Comme par construction $x \in [a_n, b_n]$ quel que soit l'entier n, on peut écrire

$$|x - a_n| \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

et en déduire que $\lim a_n = x$. Et bien sûr aussi $\lim b_n = x$ puisque (a_n) et (b_n) ont même limite.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a vu que

$$f(a_n) = \left(1-\frac{k_n}{2^n}\right)f(a)+\frac{k_n}{2^n}f(b). \quad (*)$$

Comme f est continue, $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(x)$. On a aussi :

$$\frac{k_n}{2^n} = \frac{a_n - a}{b-a}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{k_n}{2^n} = \frac{x-a}{b-a} = t.$$

Finalement, il suffit de passer à la limite dans l'égalité $(*)$ pour obtenir

$$f((1-t)a+tb) = (1-t)f(a)+tf(b).$$

• *Montrons la propriété 4.* Si f est une fonction numérique définie et continue sur $\mathbb{R}$ telle que l'on ait $\frac{f(\lambda)+f(\mu)}{2} = f\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right)$ pour tous réels λ et μ, on vient de montrer que

$$\forall a,b \in \mathbb{R} \quad \forall t \in [0,1] \quad f((1-t)a+tb) = (1-t)f(a)+tf(b),$$

autrement dit que f conserve les barycentres. Voilà une propriété caractéristique bien connue des applications affines ! On peut donc affirmer que f est une fonction affine.

Remarque : On peut démontrer cela directement. Si α et β désignent des réels tels que $f(a) = \alpha a + \beta$ et $f(b) = \alpha b + \beta$ (ils existent car le système en α, β ainsi écrit est de Cramer), alors tout x appartenant à $[a, b]$ s'écrivant $x = (1-t)a + tb$ pour un $t \in [0, 1]$ convenable, on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= f((1-t)a + tb) \\ &= (1-t) f(a) + t f(b) \\ &= (1-t)(\alpha a + \beta) + t(\alpha b + \beta) \\ &= \alpha((1-t)a + t)b + \beta \\ &= \alpha x + \beta. \end{aligned}$$

Evidemment, cela montre seulement que f coïncide avec la fonction affine $x \mapsto \alpha x + \beta$ sur $[a, b]$. Mais on en déduirait facilement que f et $x \mapsto \alpha x + \beta$ coïncident sur tout $\mathbb{R}$ en choisissant un réel x_0 quelconque, en choisissant un intervalle $[a', b']$ contenant à la fois x_0 et $[a, b]$, puis en concluant de la même façon que f est une restriction d'une fonction affine $x \mapsto \alpha' x + \beta'$ sur $[a', b']$, restriction qui ne peut que coïncider avec la fonction $x \mapsto \alpha x + \beta$ sur $[a, b]$, d'où l'on déduit $\alpha' = \alpha$ et $\beta' = \beta$, ce qui permet d'écrire $f(x_0) = \alpha x_0 + \beta$, et le tour est joué !

4.3.3. C'est le cas, puisque la réciproque est évidente : si f est affine, alors f conserve les barycentres, donc transforme le milieu $\frac{\lambda+\mu}{2}$ de l'intervalle $[\lambda, \mu]$ en le milieu de l'intervalle $[f(\lambda), f(\mu)]$, c'est-à-dire

$$f\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right) = \frac{f(\lambda) + f(\mu)}{2}.$$

On peut d'ailleurs vérifier cela directement en écrivant $f(x) = \alpha x + \beta$ et en calculant les deux membres de l'égalité.

4.4.1. Il suffit de dériver les deux membres de l'égalité

$$\frac{1}{2}[f(m+x) - f(m-x)] = x f'(m)$$

par rapport à x, pour m fixé, pour obtenir

$$\frac{1}{2}\left[f'(m+x) + f'(m-x)\right] = f'(m).$$

4.4.2. La question précédente montre que f' vérifie (2), donc est une application affine d'après la propriété 4. Il existe ainsi deux réels β, γ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \alpha x + \beta$$

d'où

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{\alpha}{2}x^2 + \beta x + \gamma,$$

et f est une fonction polynomiale de degré 2.

SECOND PROBLÈME

Première partie : trois études préliminaires

1.1.1. • *Analyse* : Si $\mathcal{C}$ est un cercle de centre O tangent aux quatre supports des côtés du losange $ABA'B'$, alors O est à égale distance des droites parallèles (AB') et $(A'B)$ d'une part, (AB) et $(A'B')$ d'autre part (FIG. 3.3). L'ensemble des points équidistants de (AB') et $(A'B)$ est la droite D parallèle à (AB') et passant par le milieu de $[AB]$. De même ; l'ensemble des points équidistants de (AB) et $(A'B')$ est la droite D' parallèle à (AB) et passant par le milieu de $[A'B]$. Ces deux droites D et D' n'ayant pas la même direction, elles se coupent en un unique point I qui n'est autre que l'intersection des diagonales $[AA']$ et $[BB']$ du losange. Cela se vérifie par exemple en utilisant le Théorème de la droite des milieux : la droite D parallèle à $(A'B)$ et passant par le milieu de $[AB]$ coupe nécessairement le segment $[AA']$ en son milieu qui n'est autre que le point I.
Finalement, si $\mathcal{C}$ existe, son centre est le centre de symétrie I du losange, et son rayon est la distance de I à (AB), donc $\mathcal{C}$ est unique.

• *Synthèse* : Le cercle $\mathcal{C}$ de centre I et de rayon r la distance $d(I,(AB))$ de I à (AB) est bien inscrit dans $ABA'B'$ puisque tangent à chacun des côtés de $ABA'B'$.
En effet, $r = d(I,(AB))$ donc $\mathcal{C}$ est tangent à (AB). La réflexion par rapport à (AA') transformant (AB) en (AB') et conservant l'orthogonalité et les distances, on peut facilement vérifier que $r = d(I,(AB)) = d(I,(AB'))$ (voir remarque qui suit) et donc que $\mathcal{C}$ est tangent à (AB'). Et ainsi de suite...

Remarque : Vérifions l'égalité $d(I,(AB)) = d(I,(AB'))$. Une telle précision est mal venue dans la résolution de cette question, et sera sautée à l'écrit du concours, tout simplement parce qu'elle nous ferait perdre trop de temps sur un problème aussi long où tant de points restent à gagner.
Mais savoir démontrer rigoureusement ce type de résultat est bénéfique pour soi-même et important pour répondre au jury d'oral si cela devient nécessaire. Voilà donc comment on peut s'expliquer...

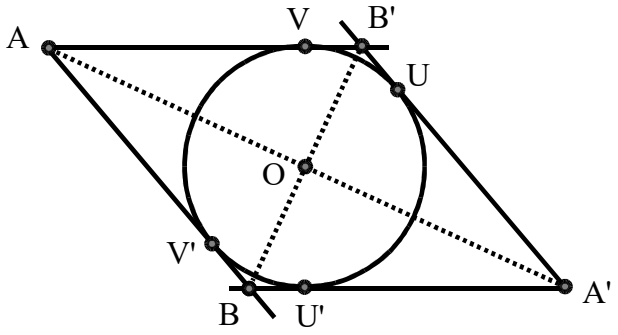


FIG. 3.3 – Cercle inscrit dans un losange

On a $d(I,(AB)) = IH$ où H est le projeté orthogonal de I sur (AB). La réflexion $s_{(AA')}$ de base (AA') transforme la droite (AB) en (AB'), donc le point H appartenant à (AB) en un point H' appartenant à (AB').
Mais $s_{(AA')}$ conserve l'orthogonalité, donc transforme la perpendiculaire L à (AB) issue de I en la perpendiculaire L' à (AB') issue de $s_{(AA')}(I) = I$. Comme $H \in L$, on en déduit $H' \in L'$. Finalement $H' \in L' \cap (AB')$ donc H' est le projeté orthogonal de I sur (AB'), et

$$d\left(I,\left(AB'\right)\right) = IH' = IH = d(I,(AB))$$

en utilisant la conservation des distances par $s_{(AA')}$.

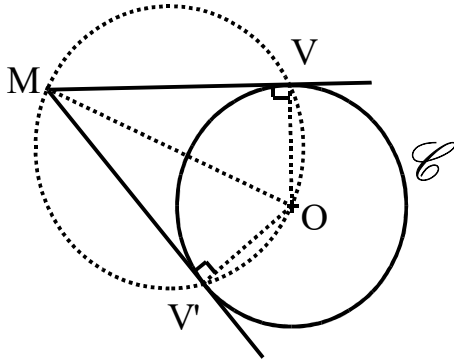


FIG. 3.4 – Tangentes à un cercle issues de M

1.1.2.1. Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon r, et M un point tel que $OM > r$ (FIG. 3.4). Le cercle $\mathcal{C}_{[OM]}$ de diamètre $[OM]$ coupe $\mathcal{C}$ en deux points

distincts V et V' puisque

$$\left|\frac{OM}{2} - r\right| < \frac{OM}{2} < \frac{OM}{2} + r.$$

On vérifie en effet très facilement que ces trois inégalités strictes sont vraies :

- $\frac{OM}{2} < \frac{OM}{2} + r$ puisque $0 < r$,
- $\frac{OM}{2} - r < \frac{OM}{2}$ équivaut encore à $0 < r$, qui est vraie,
- Enfin $r - \frac{OM}{2} < \frac{OM}{2}$ équivaut à $r < OM$, qui est vraie.

Par construction, V appartient à $\mathcal{C}_{[OM]}$ donc OMV est rectangle en V. La droite (MV) passe donc par le point V de $\mathcal{C}$ en étant perpendiculaire au rayon $[OV]$, et il s'agit de la tangente à $\mathcal{C}$ en V. De même, (MV') est une seconde tangente à $\mathcal{C}$ issue de M.

La droite (OM) relie les centres des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_{[OM]}$, donc est un axe de symétrie de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{C}_{[OM]}$ La paire $\{V, V'\} = \mathcal{C} \cap \mathcal{C}_{[OM]}$ est donc invariante par la réflexion $s_{(OM)}$ d'axe (OM). Comme $V \notin (OM)$, $s_{(OM)}(V) \neq V$ et nécessairement $s_{(OM)}(V) = V'$.
La réflexion $s_{(OM)}$ conserve les distances et transforme V en V', et M en M, donc $MV = MV'$.

1.1.2.2. Supposons qu'un parallélogramme $AB'A'B$ soit circonscrit à un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, et notons U, V, U', V' les points de contact du cercle et des côtés du parallélogramme, comme sur la FIG. 3.3.
La question précédente montre que

$$\begin{cases} AV = AV' = a \\ BV' = BU' = b \\ A'U' = A'U = c \\ B'U = B'V = d. \end{cases}$$

Comme $AB'A'B$ est un parallélogramme, $AB' = BA'$ et $AB = A'B'$, donc

$$\begin{cases} a + d = b + c \\ a + b = c + d. \end{cases}$$

En soustrayant membre à membre, on obtient $d - b = b - d$, soit $b = d$. En remplaçant on obtient $a = c$. Finalement

$$AB' = AV + VB' = a + d = c + b = UA' + B'U = A'B'$$

puisque $V \in [AB']$ et $U \in [A'B']$ (en effet, le cercle est inclus dans la bande du plan de frontières (AB) et $(A'B')$ donc $V \in [AB']$, et de la même façon $U \in [A'B']$). Le parallélogramme $AB'A'B$ possède deux côtés consécutifs $[AB']$ et $[A'B']$ de même longueur, c'est donc un losange.

1.2. Tout point M de coordonnées $(x, y) = (R\cos t, R\sin t)$ est tel que

$$x^2 + y^2 = (R\cos t)^2 + (R\sin t)^2 = R^2$$

donc appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R. Réciproquement, si $M(x, y)$ appartient à $\mathcal{C}$, alors $x^2 + y^2 = R^2$ et donc $|x/R| \leq 1$. Il existe alors $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = R\cos t$. De $y^2 = R^2\left(1 - \cos^2 t\right) = R^2 \sin^2 t$ on déduit $y = \pm R\sin t$.
Si $y = R\sin t$, on obtient $(x, y) = (R\cos t, R\sin t)$, donc $M \in \Gamma$.
Sinon $y = -R\sin t = R\sin(-t)$ et il suffit de poser $t' = -t$ pour pouvoir écrire $(x, y) = (R\cos t', R\sin t')$ et conclure encore à $M \in \Gamma$.

1.3.1. φ est définie analytiquement dans le repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ par :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = ky. \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = ky \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x' \\ y = \dfrac{y'}{k} \end{cases}$$

et tout point $N(x', y')$ du plan possède un et un seul antécédent par φ, à savoir le point $M(x', y'/k)$. Cela prouve que φ est une bijection de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}$ et que φ^{-1} est l'affinité orthogonale d'axe d et de rapport $1/k$.

1.3.2.1. Primons systématiquement les images de points par φ et les coordonnées des points images. De

$$M(x, y) \in \Delta \quad \Leftrightarrow \quad ax + by + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax' + \frac{b}{k}y' + c = 0$$

on déduit l'inclusion $\varphi(\Delta) \subset \Delta'$ où Δ' est la droite d'équation cartésienne $ax' + \frac{b}{k}y' + c = 0$. Le même argument appliqué avec l'affinité réciproque φ^{-1} montre que $\varphi^{-1}(\Delta') \subset \Delta$, c'est-à-dire $\Delta' \subset \varphi(\Delta)$ (puisque φ est bijective). Donc

$$\varphi(\Delta) = \Delta'.$$

L'expression analytique de φ montre que tout point de d est invariant par φ. Si Δ coupe d en I, alors $\varphi(I) = I$ appartiendra donc encore à $\Delta' = \varphi(\Delta)$.

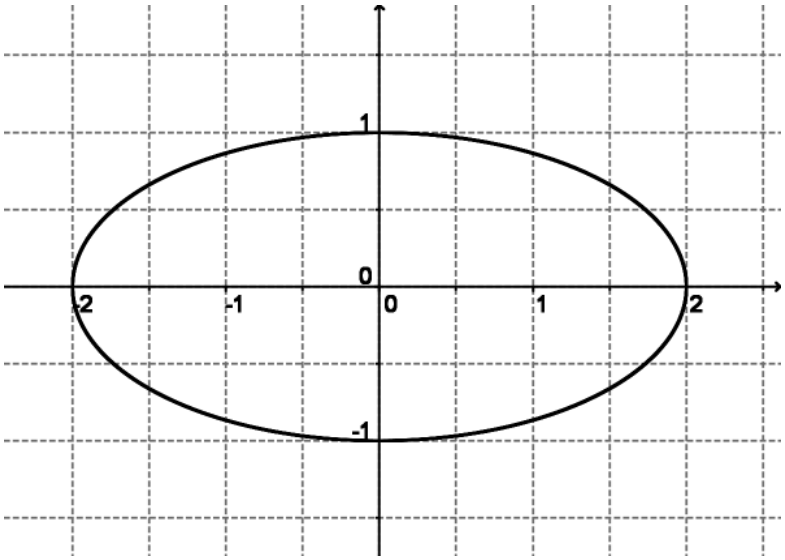


FIG. 3.5 – Ellipse d'équation $x^2/4 + y^2 = 1$

1.3.2.2. Si (x_M, y_M), (x_N, y_N), (x_P, y_P) désignent les coordonnées des points M, N, P, et si on prime toutes les images et toutes les coordonnées des images par φ, on trouve $M'(x_M, ky_M)$, $N'(x_N, ky_N)$ et $P'(x_P, ky_P)$, de sorte que :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MP} = \lambda\overrightarrow{MN} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_P - x_M \\ y_P - y_M \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_N - x_M \\ y_N - y_M \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'_P - x'_M \\ \frac{1}{k}y'_P - \frac{1}{k}y'_M \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x'_N - x'_M \\ \frac{1}{k}y'_N - \frac{1}{k}y'_M \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{M'P'} = \lambda\overrightarrow{M'N'}.
\end{aligned}$$

1.3.3. Soient Δ et Λ deux droites strictement parallèles. Si $\varphi(\Delta)$ et $\varphi(\Lambda)$ n'étaient pas parallèles, elles se couperaient en un point A et $\varphi^{-1}(A)$ appartiendrait à $\Delta \cap \Lambda$, ce qui est absurde. Donc $\varphi(\Delta)$ et $\varphi(\Lambda)$ sont parallèles.
Le cas où Δ et Λ sont confondues ne pose aucun problème, puisqu'alors $\varphi(\Delta) = \varphi(\Lambda)$ et $\varphi(\Delta)$ et $\varphi(\Lambda)$ sont encore parallèles.

1.3.4.1. Les fonctions cosinus et sinus étant périodiques de période 2π, la courbe $\mathcal{H}$ est aussi bien décrite quand le paramètre t parcourt $\mathbb{R}$. Cela étant, si $M(\alpha\cos t, \beta\sin t) \in \mathcal{H}$, son symétrique N par rapport à O, de coordonnées

$$(-\alpha\cos t, -\beta\sin t) = (\alpha\cos(\pi + t), \beta\sin(\pi + t))$$

appartient encore à $\mathcal{H}$. Si s_O désigne la symétrie par rapport à O, on a donc $s_O(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$, puis aussi $s_O(s_O(\mathcal{H})) \subset s_O(\mathcal{H})$ c'est-à-dire $\mathcal{H} \subset s_O(\mathcal{H})$ puisque s_O est involutive. On peut conclure à $s_O(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$ et affirmer que O est un centre de symétrie pour $\mathcal{H}$.

1.3.4.2. La FIG. 3.5 représente l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

Son centre est O, et elle admet les points de coordonnées $(\pm 2, 0)$ et $(0, \pm 1)$ pour sommets.

1.3.4.3. Notons $M'(x', y')$ l'image de $M(x, y)$ par φ. On a $(x', y') = (x, ky)$, donc

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \mathcal{H} &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = \alpha \cos t \\ y = \beta \sin t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x' = \alpha \cos t \\ y' = k\beta \sin t \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad M'\left(x', y'\right) \in \mathcal{H}' \end{aligned}$$

où $\mathcal{H}'$ est une ellipse d'après la définition de l'énoncé donnée en 1.3.4 (car α et $k\beta$ sont strictement positifs). On a prouvé l'implication

$$M \in \mathcal{H} \quad \Rightarrow \quad M' \in \mathcal{H}'$$

donc l'inclusion $\varphi(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}'$, mais *il ne faut pas oublier de vérifier l'inclusion réciproque* !
Réciproquement, si $N(x', y')$ est un point de $\mathcal{H}'$, le fait que φ soit une bijection du plan dans lui-même nous assure l'existence d'un point M tel que $\varphi(M) = N$, si bien que l'on puisse reprendre la notation $N = M'$ et relire les équivalences précédentes "dans l'autre sens", pour obtenir l'implication :

$$N = M' \in \mathcal{H}' \quad \Rightarrow \quad M \in \mathcal{H}$$

et conclure à $N = \varphi(M) \in \varphi(\mathcal{H})$. On peut maintenant affirmer sans crainte que $\varphi(\mathcal{H}) = \mathcal{H}'$.

1.3.4.4. En raisonnant comme dans la question précédente, on montre que $\varphi(\mathcal{H})$ est donnée par les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x' = \alpha \cos t \\ y' = k\beta \sin t \end{cases} \qquad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

Ici $\alpha > 0$ mais $k\beta < 0$. Cela ne pose pas de problème, car il suffit d'écrire ces équations paramétriques dans la base $(O, \vec{i}, -\vec{j})$ pour qu'elles deviennent

$$\begin{cases} X = \alpha \cos t \\ Y = -k\beta \sin t \end{cases} \qquad \text{où } t \in \mathbb{R},$$

avec α et $-k\beta$ positifs. $\varphi(\mathcal{H})$ est donc encore une ellipse d'après la définition de l'énoncé.

1.3.4.5. $\varphi(\mathcal{H})$ sera un cercle si et seulement si $\alpha = k\beta$ ou $\alpha = -k\beta$, c'est-à-dire $k = \pm\alpha/\beta$.

Deuxième partie : étude de deux conditions de contact d'une droite avec un cercle

2.1.1. D'après la question 1.1.2.1, les points G et H (resp. G' et H) de la FIG. 3.6 sont symétriques par rapport à (IP) (resp. (IP')), donc avec des angles orientés de vecteurs :

$$\begin{cases} (\overrightarrow{IG}, \overrightarrow{IP}) = (\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IH}) \ (2\pi) \\ (\overrightarrow{IH}, \overrightarrow{IP'}) = (\overrightarrow{IP'}, \overrightarrow{IG'}) \ (2\pi) . \end{cases}$$

Par suite

$$\begin{aligned} \pi &= (\overrightarrow{IG}, \overrightarrow{IG'}) \ (2\pi) \\ &= (\overrightarrow{IG}, \overrightarrow{IP}) + (\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IH}) + (\overrightarrow{IH}, \overrightarrow{IP'}) + (\overrightarrow{IP'}, \overrightarrow{IG'}) \ (2\pi) \\ &= 2(\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IH}) + 2(\overrightarrow{IH}, \overrightarrow{IP'}) \ (2\pi) \\ &= 2(\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IP'}) \ (2\pi) . \end{aligned}$$

On en déduit $(\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IP'}) = \pi/2 \ (\pi)$, et le triangle IPP' est rectangle en I.

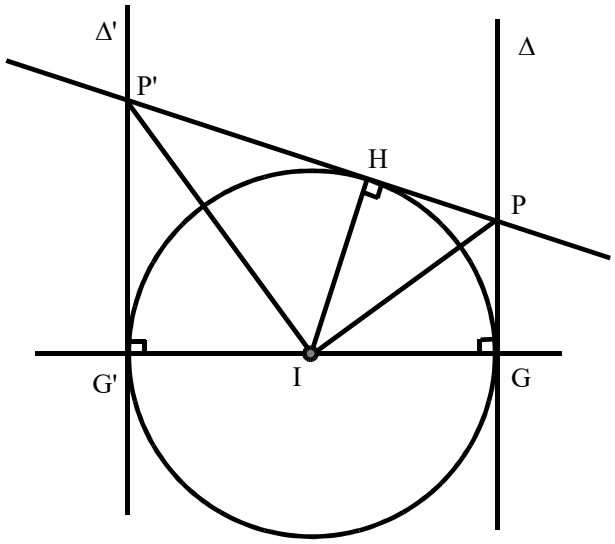


FIG. 3.6 – Première condition de contact

2.1.2. H est le pied de la hauteur issue de I dans le triangle rectangle IPP'. Une formule bien connue du cours concernant les triangles rectangles (voir [2], Th. 185, ou [3], Th. 128) donne $IH^2 = \overline{PH} \times \overline{HP'}$soit $\overline{HP} \times \overline{HP'} = -R^2$.

2.1.3. En utilisant la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{IP}.\overrightarrow{IP'} = (\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GP}).(\overrightarrow{IG'} + \overrightarrow{G'P'}) = -R^2 + \overrightarrow{GP}.\overrightarrow{G'P'}.$$

Comme $\overrightarrow{IP}.\overrightarrow{IP'} = 0$, on en déduit $\overrightarrow{GP}.\overrightarrow{G'P'} = R^2$.

2.2. P est distinct de G car $\overrightarrow{GP}.\overrightarrow{G'P'} = R^2 \neq 0$. Soit T la tangente à $\mathcal{C}$ issue de P et distincte de Δ. T coupe $\mathcal{C}$ en H et Δ' en P''. Alors :

$$\overrightarrow{GP}.\overrightarrow{G'P'} = R^2 = \overrightarrow{GP}.\overrightarrow{G'P''}$$

donc $\overrightarrow{GP}.\overrightarrow{P'P''} = 0$. Si l'on avait $P' \neq P''$, on pourrait dire que Δ est orthogonale à $\Delta' = (P'P'')$, ce qui est absurde. Donc $P' = P''$ et la droite $T = (PP')$ n'est autre que la tangente à $\mathcal{C}$ au point H.

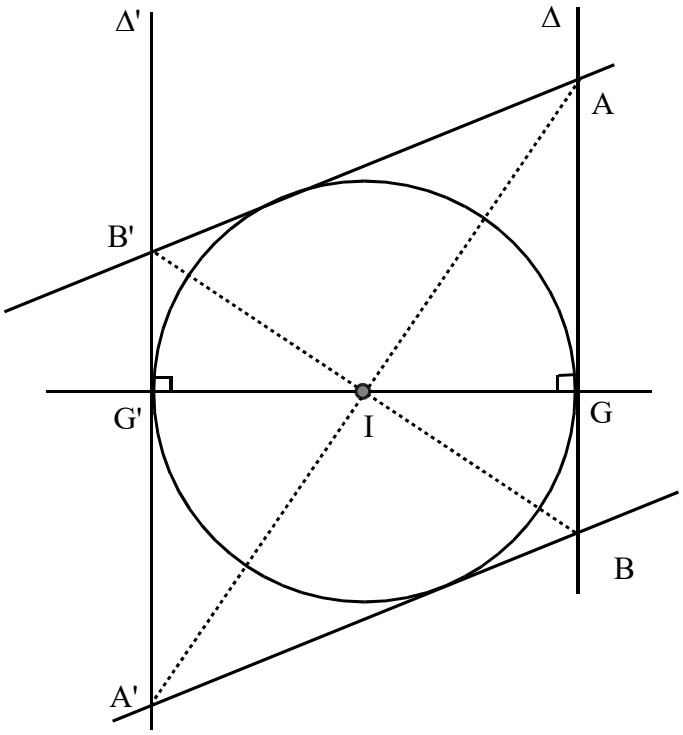


FIG. 3.7 – Seconde condition de contact

2.3.1. Si un losange $ABA'B'$ est solution, l'une des tangentes à $\mathcal{C}$ issue de A est $(AB) = \Delta$, et l'autre tangente issue de A coupe Δ' en B'. Nécessairement B

et A' sont les symétriques de B' et A par rapport au centre I du cercle, et ces symétriques appartiennent respectivement à Δ et Δ'. Si un tel losange existe, il est donc unique.
Comme l'image d'une tangente T à $\mathcal{C}$ par la symétrie par rapport à I est encore une tangente à $\mathcal{C}$ parallèle à T (droite ayant un seul point de contact avec le cercle), le quadrilatère $ABA'B'$ construit comme on vient de l'indiquer est bien un losange.

2.3.2.1. Les coordonnées de A sont (R, a). D'après 2.1.1, le triangle AIB' est rectangle en I. Le Théorème de Pythagore donne $AB'^2 = AI^2 + IB'^2$.
Si l'on note $(-R, y)$ les coordonnées de B', on obtient :

$$(2R)^2 + (a-y)^2 = (R^2 + a^2) + (R^2 + y^2)$$

d'où $ay = R^2$, et $y = R^2/a$. Par symétrie par rapport à I, on obtient toutes les autres coordonnées :

$$A\begin{pmatrix} R \\ a \end{pmatrix} \; ; \quad B'\begin{pmatrix} -R \\ R^2/a \end{pmatrix} \; ; \quad A'\begin{pmatrix} -R \\ -a \end{pmatrix} \; ; \quad B\begin{pmatrix} R \\ -R^2/a \end{pmatrix}.$$

2.3.2.2. Notons

$$P\begin{pmatrix} R \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P'\begin{pmatrix} -R \\ y' \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{P'A'} = \begin{pmatrix} 0 \\ a-y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -a-y' \end{pmatrix} = (a-y)\left(-a-y'\right)$$

$$\overrightarrow{PB}.\overrightarrow{P'B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -R^2/a-y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ R^2/a-y' \end{pmatrix} = \left(\frac{R^2}{a}+y\right)\left(y'-\frac{R^2}{a}\right)$$

de sorte que la condition 2 :

$$R^2\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{P'A'} + a^2\overrightarrow{PB}.\overrightarrow{P'B'} = 0$$

s'écrive

$$R^2\,(a-y)\left(-a-y'\right) + \left(R^2+ay\right)\left(ay'-R^2\right) = 0. \quad (\dagger)$$

Par ailleurs, la condition 1 montre que (PP') est tangente à $\mathcal{C}$ si et seulement si

$$\overrightarrow{GP}.\overrightarrow{G'P'} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ y' \end{pmatrix} = R^2$$

c'est-à-dire

$$yy' = R^2. \quad (\ddagger)$$

On vérifie que (†) équivaut bien à (‡) :

$$\begin{aligned}(\dagger) &\Leftrightarrow R^2\left(yy' + a\left(y - y'\right) - a^2\right) - R^4 + aR^2\left(y' - y\right) + a^2yy' = 0\\ &\Leftrightarrow a^2\left(yy' - R^2\right) + R^2\left(yy' - R^2\right) = 0\\ &\Leftrightarrow \left(a^2 + R^2\right)\left(yy' - R^2\right) = 0\\ &\Leftrightarrow (\ddagger)\,.\end{aligned}$$

Troisième partie : étude d'une condition de contact d'une droite avec une ellipse

3.1.1. Le vecteur de coordonnées $(-\alpha\sin t_0, \beta\cos t_0)$ dirige la tangente T_0 à $\mathcal{H}$ en M_0 ; donc une équation, de cette tangente est :

$$\begin{vmatrix} x - \alpha\cos t_0 & -\alpha\sin t_0 \\ y - \beta\sin t_0 & \beta\cos t_0 \end{vmatrix} = 0$$

soit $\quad T_0 : \quad (\beta\cos t_0)x + (\alpha\sin t_0)y - \alpha\beta = 0.$

3.1.2. Les deux tangentes T_0 et T_1 respectivement en M_0 et M_1, admettent les équations

$$\begin{cases} T_0 : & (\beta\cos t_0)x + (\alpha\sin t_0)y - \alpha\beta = 0 \\ T_1 : & (\beta\cos t_1)x + (\alpha\sin t_1)y - \alpha\beta = 0 \end{cases}$$

et seront parallèles si et seulement si

$$\begin{vmatrix} \beta\cos t_0 & \alpha\sin t_0 \\ \beta\cos t_1 & \alpha\sin t_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (*)$$

Comme

$$\begin{aligned}(*) &\Leftrightarrow \sin t_1\cos t_0 - \sin t_0\cos t_1 = 0\\ &\Leftrightarrow \sin\left(t_1 - t_0\right) = 0\\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad t_1 = t_0 + k\pi,\end{aligned}$$

il existe un et un seul point M_1 de $\mathcal{H}$, distinct de M_0, tel que la tangente à $\mathcal{H}$ en M_1 soit parallèle à la tangente à $\mathcal{H}$ en M_0. C'est le point de paramètre $t_1 \in]-\pi, \pi]$ tel que $t_1 \equiv t_0 + \pi\ (2\pi)$.

3.1.3. Etant donné un vecteur non nul quelconque $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (a, b), il existe $t_0 \in]-\pi, \pi]$ tel que

$$\begin{vmatrix} -\alpha\sin t_0 & a \\ \beta\cos t_0 & b \end{vmatrix} = 0.$$

C'est évident, puisqu'une telle équation s'écrit $u\sin t_0 + v\cos t_0 = 0$, avec $(u,v) \neq (0,0)$, donc aussi sous la forme $\sin(t_0+\varphi) = 0$ pour un réel φ convenable.
Il existe donc un point $M_0(\alpha\cos t_0, \beta\cos t_0)$ tel que la tangente T_0 à $\mathcal{H}$ en M_0 soit dirigée par $\overrightarrow{u}$. La question précédente montre qu'il existe un unique point M_1 de $\mathcal{H}$, distinct de M_0, tel que la tangente T_1 à $\mathcal{H}$ en M_1 soit parallèle à T_0. Finalement, les droites T_0 et T_1 sont parallèles et tangentes à l'ellipse.
Il suffit de recommencer avec un autre vecteur $\overrightarrow{v}$ non nul à la place de $\overrightarrow{u}$: il existe deux tangentes T_2, T_3 parallèles à $\mathcal{H}$ et de direction $\mathbb{R}\overrightarrow{v}$. En notant M, N, P, Q les intersections des droites T_0, T_1, T_2, T_3, on constate que $MNPQ$ est un parallélogramme circonscrit à l'ellipse, dont les directions des côtés ont été choisies arbitrairement.

3.2.1. • La question 1.3.4.5 montre que $\varphi(\Gamma) = \mathcal{H}$.

• La tangente d à Γ en $M(\alpha\cos t_0, \alpha\sin t_0)$ admet l'équation

$$\begin{pmatrix} \alpha\cos t_0 \\ \alpha\sin t_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-\alpha\cos t_0 \\ y-\alpha\sin t_0 \end{pmatrix} = 0$$

soit $d: \quad (\cos t_0)\,x + (\sin t_0)\,y - \alpha = 0$. L'image $\varphi(d)$ de d par l'affinité φ est la droite d'équation

$$(\cos t_0)\,x' + (\sin t_0)\,\frac{\alpha y'}{\beta} - \alpha = 0$$

soit $(\beta\cos t_0)x + (\alpha\sin t_0)y - \alpha\beta = 0$. On reconnaît l'équation de T_0 obtenue en 3.1.1. La droite $\varphi(d)$ est donc la tangente à l'ellipse au point $\varphi(M)$ de coordonnées $M_0(\alpha\cos t_0, \beta\cos t_0)$.

Remarque : α) Dans le cours, on rappelle qu'une droite est tangente à un cercle ou à une ellipse si et seulement si elle coupe ce cercle ou cette ellipse en un seul point. Il est alors facile de voir que d est tangente au cercle Γ si et seulement si $d \cap \Gamma$ est un singleton, et utiliser les propriétés des affinités rappelées en 1.3 pour constater que $\varphi(d)$ est une droite qui coupe $\varphi(\Gamma) = \mathcal{H}$ en un seul point (comme φ est bijective, on peut écrire cette "conservation des contacts" : $\varphi(d\cap\Gamma) = \varphi(d)\cap\varphi(\Gamma) = \varphi(d)\cap\mathcal{H}$ et en déduire que $\varphi(d)\cap\mathcal{H}$ est un singleton).

β) Rappelons que tous ces résultats de cours concernant les ellipses et les affinités sont à retrouver dans [2] (§ 3.4 pour les affinités, § 20.4.2 pour l'ellipse et les affinités, et § 22.3 pour une étude plus générale des images des cercles par des affinités).

FIG. 3.8 – Ellipses et affinités

La FIG. 3.8 extraite de cet ouvrage montre d'ailleurs ce qu'*il faut retenir visuellement*.
Sur cette figure, N est de coordonnées $(\alpha\cos t_0, \alpha\cos t_0)$ et M est de coordonnées $(\alpha\cos t_0, \beta\cos t_0)$. La droite $d = (TN)$ est une tangente au cercle, et nous venons de voir que $\varphi(d)$ est tangente à l'ellipse.
La construction de $\varphi(d)$ s'avère facile : le point T, intersection de d et de l'axe des abscisses, est invariant par l'affinité φ, donc $\varphi(d)$ est la droite qui passe par T et par M. Le point M est facile à construire en utilisant le Théorème de Thalès avec les triangles ONS et RNM.
Tout cela est du cours qui nous sert de "guide" dans ce problème dont l'optique est néanmoins différente, puisque consiste à travailler souvent avec des équations de tangentes, ce que nous avons fait.

3.2.2. φ est une affinité. C'est donc une bijection du plan dans le plan qui transforme :

- le cercle Γ en l'ellipse $\mathcal{H}$,
- des droites parallèles en des droites parallèles (Question 1.3.3),
- une tangente d de Γ en une tangente $\varphi(d)$ de $\mathcal{H}$.

Si $MNM'N'$ est un parallélogramme circonscrit à $\mathcal{H}$, les antécédents A, B, A', B' des sommets M, N, M', N' seront les sommets d'un parallélogramme $ABA'B'$ circonscrit à Γ. D'après 1.1.2.2, $ABA'B'$ est un losange.
L'unicité de $ABA'B'$ est évidente puisque les antécédents de M, N, M', N' sont... uniques !

3.2.3. Une vision d'ensemble nous est donnée par la FIG. 3.9. La droite d, coupe les droites (MN) et $(M'N')$ en Q et Q'. On considère les antécédents par φ des points qui nous intéressent suivant le tableau :

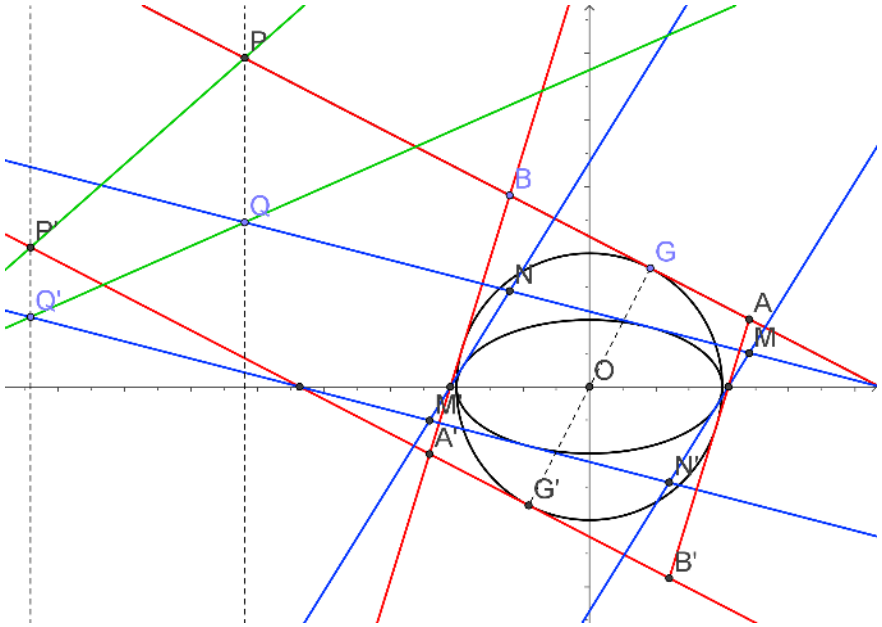


FIG. 3.9 – Vision d'ensemble pour les questions 3.2.2 & 3.2.3

Point X	P	P'	A	B	A'	B'
Point $\varphi(X)$	Q	Q'	M	N	M'	N'

Comme φ transforme une tangente d de Γ en une tangente $\varphi(d)$ de $\mathcal{H}$,

$$d = \left(QQ'\right) \text{ tangente à } \mathcal{H} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^{-1}(d) = \left(PP'\right) \text{ tangente à } \Gamma.$$

Posons $\Delta = (AB)$ et $\Delta' = (A'B')$. Les droites Δ et Δ' sont parallèles et tangentes à Γ, donc on se trouve dans la situation de la deuxième partie du problème. Notons encore G et G' les points de contact de Δ, Δ' et de Γ. D'après la condition 2 de la question 2.3,

$$\begin{aligned} d = \left(QQ'\right) \text{ tangente à } \mathcal{H} \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi^{-1}(d) = \left(PP'\right) \text{ tangente à } \Gamma \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha^2 \overrightarrow{PA}.\overrightarrow{P'A'} + a^2 \overrightarrow{PB}.\overrightarrow{P'B'} = 0 \quad (*) \end{aligned}$$

où a désigne l'ordonnée de A dans le repère $(I, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de la question 2.3.
Les vecteurs intervenant dans les produits scalaires de la formule $(*)$ sont tous colinéaires, et on peut supposer $Q \neq N$. Il existe alors des réels u, v, w tels que

$$\overrightarrow{QM} = u\overrightarrow{QN} \; ; \quad \overrightarrow{Q'M'} = v\overrightarrow{QN} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{Q'N'} = w\overrightarrow{QN}.$$

D'après 1.3.2.2, on a aussi

$$\overrightarrow{PA} = u\overrightarrow{PB}\ ; \quad \overrightarrow{P'A'} = v\overrightarrow{PB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{P'B'} = w\overrightarrow{PB}.$$

Par suite

$$\begin{aligned}
(*) \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha^2 uv\, PB^2 + a^2 w\, PB^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \alpha^2 uv + a^2 w = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \alpha^2 \frac{\overline{QM}}{\overline{QN}} . \frac{\overline{Q'M'}}{\overline{QN}} + a^2 \frac{\overline{Q'N'}}{\overline{QN}} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \alpha^2 \overrightarrow{QM}.\overrightarrow{Q'M'} + a^2 \overrightarrow{QN}.\overrightarrow{Q'N'} = 0. \quad (**)
\end{aligned}$$

On obtient finalement les équivalences

$$\left(d = (QQ') \text{ tangente à } \mathcal{H}\right) \Leftrightarrow \left(\alpha^2 \overrightarrow{QM}.\overrightarrow{Q'M'} + a^2 \overrightarrow{QN}.\overrightarrow{Q'N'} = 0\right) \quad (✠)$$

où a est bel et bien un réel fixé par le choix du parallélogramme $MNM'N'$ qui lui-même fixe le losange $ABA'B'$ (a est l'ordonnée de A dans le repère $(I, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de la question 2.3).
Bref, nous avons démontré l'équivalence (✠) qui n'est pas exactement celle demandée par l'énoncé, mais nous ne pouvons pas faire mieux. L'affirmation suivant laquelle a existerait en étant égal à n'importe quel réel non nul est fausse, comme on le démontre dans la remarque ci-dessous.

Remarque : Il y a une erreur dans la formulation de la question 3.2.3 au sujet de a. On a montré l'équivalence (✠), ce qui prouve bien évidemment que, si la droite (QQ') est tangente à $\mathcal{H}$, alors il existe un réel non nul a tel que $\alpha^2 \overrightarrow{QM}.\overrightarrow{Q'M'} + a^2 \overrightarrow{QN}.\overrightarrow{Q'N'} = 0$.
Inutile de tenter de démontrer la réciproque, qui est fausse : s'il existe un réel non nul a tels que $\alpha^2 \overrightarrow{QM}.\overrightarrow{Q'M'} + a^2 \overrightarrow{QN}.\overrightarrow{Q'N'} = 0$, il n'y a aucune raison pour que (QQ') soit tangente à $\mathcal{H}$.
La FIG. 3.10 montre un contre-exemple. En effet, si l'on s'arrange pour avoir $PB \neq 0$ et $P'B' \neq 0$ (donc $w \neq 0$) :

$$\begin{aligned}
\left(\exists a \quad \alpha^2 \overrightarrow{QM}.\overrightarrow{Q'M'} + a^2 \overrightarrow{QN}.\overrightarrow{Q'N'} = 0\right) &\Leftrightarrow \left(\exists a \quad \alpha^2 uv\, PB^2 + a^2 w\, PB^2 = 0\right) \\
&\Leftrightarrow \left(\exists a \quad \alpha^2 uv + a^2 w = 0\right) \\
&\Leftrightarrow \left(\exists a \quad a^2 = -\frac{\alpha^2 uv}{w}\right),
\end{aligned}$$

et il est toujours possible de trouver a tel que $a^2 = -\frac{\alpha^2 uv}{w}$ à partir du moment où l'on trouve une figure pour laquelle $uvw \leq 0$. C'est le cas de la sécante

(QQ') dessinée dans la FIG. 3.10, puisqu'alors les trois réels u, v et w sont négatifs. Et pourtant (QQ') n'est pas une tangente à l'ellipse !

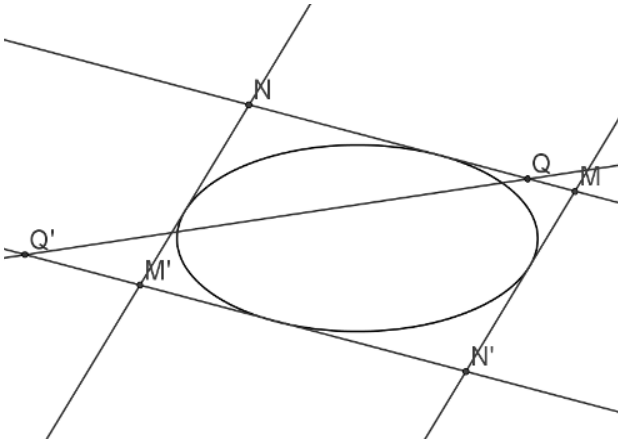


FIG. 3.10 – Contre-exemple pour la question 3.2.3

Quatrième partie : lieu des points « d'où l'on voit une ellipse suivant un angle droit » (Gaspard MONGE, 1746-1818)

4.1. Tout point M de $\mathcal{H}$ admet des coordonnées de la forme $(\alpha\cos t, \beta\sin t)$ qui vérifient l'équation

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1. \quad (\heartsuit)$$

Réciproquement, si $M(x,y)$ satisfait $(\heartsuit)$, alors $|x/\alpha|\leq 1$ et il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $x=\alpha\cos t$. De $y^2=\beta^2\left(1-\cos^2 t\right)=\beta^2\sin^2 t$ on déduit $y=\pm\beta\sin t$. On envisage deux cas :

- Si $y=\beta\sin t$, alors $(x,y)=(\alpha\cos t,\beta\sin t)$ donc $M\in\mathcal{H}$.

- Sinon $y=-\beta\sin t=\beta\sin(-t)$ et $(x,y)=(\alpha\cos(-t),\beta\sin(-t))$ permet encore d'affirmer que M appartient à $\mathcal{H}$.

4.2.1. D'après 3.1.1, une équation de la tangente T_0 à $\mathcal{H}$ au point M_0 est

$$T_0: \quad (\beta\cos t_0)x+(\alpha\sin t_0)y-\alpha\beta=0.$$

Comme $x_0=\alpha\cos t_0$ et $y_0=\beta\sin t_0$, cette équation devient

$$T_0: \quad \frac{\beta}{\alpha}x_0x+\frac{\alpha}{\beta}y_0y=\alpha\beta$$

ou

$$T_0 : \quad \frac{x_0 x}{\alpha^2} + \frac{y_0 y}{\beta^2} = 1.$$

Le point $M_0\,(x_0 y_{,0}\,)$ appartient à l'ellipse si et seulement si $\frac{x_0^2}{\alpha^2} + \frac{y_0^2}{\beta^2} = 1$, de sorte que l'on puisse affirmer que la droite $(M_0 M)$ est une tangente à l'ellipse au point M_0 si et seulement si

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{x x_0}{\alpha^2} + \dfrac{y y_0}{\beta^2} = 1 \\ \left(\dfrac{x x_0}{\alpha^2} + \dfrac{y y_0}{\beta^2} \right)^2 = \dfrac{x_0^2}{\alpha^2} + \dfrac{y_0^2}{\beta^2}. \end{cases}$$

4.2.2.1. Supposer que T_0 possède un coefficient directeur de la forme $1/q_0$ (avec $q_0 \neq 0$) revient à supposer que M_0 n'est pas l'un des sommets de l'ellipse. L'équation de T_0 s'écrit

$$T_0 : \quad y = \frac{\beta^2}{y_0} \left(1 - \frac{x_0 x}{\alpha^2} \right)$$

soit

$$T_0 : \quad y = -\frac{\beta^2 x_0}{\alpha^2 y_0} x + \frac{\beta^2}{y_0}.$$

Donc $q_0 = -\dfrac{\alpha^2 y_0}{\beta^2 x_0}$.

4.2.2.2. La seconde égalité de (3) s'écrit :

$$\frac{x_0^2}{\alpha^2} - \frac{x^2 x_0^2}{\alpha^4} - 2xy \frac{x_0 y_0}{\alpha^2 \beta^2} - \frac{y^2 y_0^2}{\beta^4} + \frac{y_0^2}{\beta^2} = 0.$$

En divisant les deux membres par x_0^2/α^4, on trouve

$$\alpha^2 - x^2 - 2xyq_0 - \frac{\alpha^4 y^2 y_0^2}{\beta^4 x_0^2} + \frac{\alpha^4 y_0^2}{\beta^2 x_0^2} = 0$$

$$(\beta^2 - y^2) q_0^2 + 2xyq_0 + (\alpha^2 - x^2) = 0,$$

c'est-à-dire (4).

4.2.2.3. L'équation (4) admet deux racines réelles distinctes si et seulement si, à partir du point M, on peut abaisser deux tangentes à l'ellipse $\mathcal{H}$.
L'équation (4) admet une racine réelle double si et seulement si, à partir du point M, on peut abaisser une et une seule tangente à $\mathcal{H}$, et cela revient à

dire que M appartient à $\mathcal{H}$. En effet, (4) admet une racine réelle double si et seulement si $\Delta' = 0$, où

$$\Delta' = (xy)^2 - (\beta^2 - y^2)(\alpha^2 - x^2) = \beta^2 x^2 + \alpha^2 y^2 - \beta^2 \alpha^2$$

désigne le discriminant réduit de l'équation (3). La condition $\Delta' = 0$ s'écrit

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

et signifie que $M\,(x, y)$ appartient à l'ellipse.

4.3. Soit $\mathcal{E}$ le lieu cherché. $M \in \mathcal{E}$ si et seulement si l'équation (4) admet deux racines distinctes q_0 et q_1 telles que

$$\frac{1}{q_0} \times \frac{1}{q_1} = -1,$$

i.e. $q_0 q_1 = -1$. En utilisant l'expression du produit des racines d'une équation du second degré, on obtient la condition

$$\frac{\alpha^2 - x^2}{\beta^2 - y^2} = -1$$

soit $x^2 + y^2 = \alpha^2 + \beta^2$, et on reconnaît l'équation du cercle ω de centre O et de rayon $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. C'est le cercle orthoptique de l'ellipse !

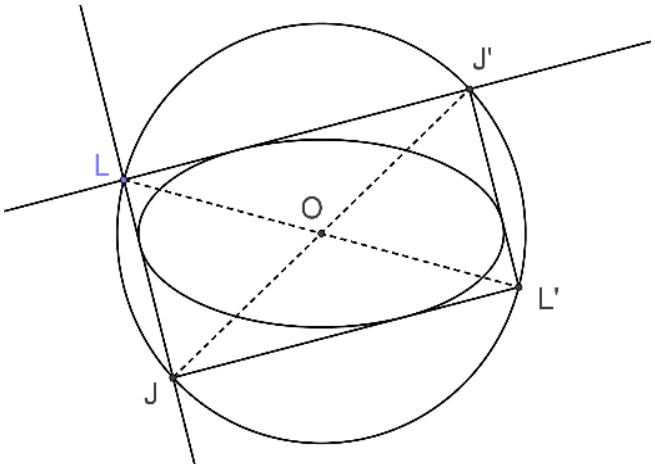


FIG. 3.11 – Cercle orthoptique de l'ellipse et rectangle circonscrit

4.4.1. La distance de O à un point de $\mathcal{H}$ est toujours inférieure à $\text{Max}\,(\alpha, \beta)$, donc toujours strictement inférieure à $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Si t est une tangente à $\mathcal{H}$, et si M_0 désigne le point de contact de t et $\mathcal{H}$, la distance $d\,(O, t)$ de O à la droite t vérifiera donc

$$d\,(O, t) \leq OM_0 \leq \text{Max}\,(\alpha, \beta) < \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

et cela prouve que t coupe le cercle ω en deux points distincts.

Remarque : On peut répondre à cette question analytiquement en résolvant le système :

$$\begin{cases} \dfrac{x_0 x}{\alpha^2} + \dfrac{y_0 y}{\beta^2} = 1 \\ x^2 + y^2 = \alpha^2 + \beta^2. \end{cases}$$

4.4.2. O est centre de symétrie du cercle, donc J' et L' appartiennent à ω, et $JLJ'L'$ est un rectangle (diagonales égales se coupant en leur milieu) inscrit dans ω (FIG. 3.11).
La symétrie centrale s_O par rapport à O transforme la tangente $t = (JL)$ en une tangente $(J'L')$ à $\mathcal{H}$. Par construction de ω, les tangentes à $\mathcal{H}$ issues de points de ω sont perpendiculaires. Comme $t = (JL)$ est une tangente à $\mathcal{H}$, et comme (JL') est perpendiculaire à (JL) et passe par J, on peut affirmer que (JL') est tangente à $\mathcal{H}$. De même (LJ') est tangente à $\mathcal{H}$, et le rectangle $JLJ'L'$ est circonscrit à l'ellipse $\mathcal{H}$.

Chapitre 4

Année 2005

4.1 Énoncé

Problème I

Dans tout le problème, on considère la fonction numérique f de variable réelle définie par :

$$\text{pour tout réel, } f(x) = -x^2 + 2x + 1$$

et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \text{ réel fixé et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = f(u_n).$$

I. Etude de la fonction f

1. Etudier le sens de variation de la fonction f.

2. Déterminer les deux racines de l'équation $f(x) - x = 0$. Ces deux racines sont réelles et de signe contraire. On note l_1 la racine négative et l_2 la racine positive.

3. Montrer que, pour tout x réel :

$$\begin{array}{l}\text{si } x < l_1, \text{ alors } f(x) < l_1\,;\\ \text{si } 1 < x < 2 \text{ alors } 1 < f(x) < 2.\end{array}$$

4. Dresser le tableau de variation de la fonction f en faisant notamment figurer dans le tableau les valeurs de x égales à l_1, l_2, 1 et 2 ainsi que les valeurs correspondantes de $f(x)$.

5. Tracer la courbe représentative de la fonction f, notée C_f, dans un repère orthonormal du plan d'unité graphique 2 cm. Préciser les coordonnées des points d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses.

6. Sur le même graphique, tracer la droite D d'équation $y = x$. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe C_f et de la droite D ainsi que la position de C_f par rapport à D.

IL Etude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Sur le graphique précédent représenter à l'aide de la courbe C_f et de la droite D les quatre premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   a) lorsque $u_0 = -0,7$;
   b) lorsque $u_0 = 1,25$.

2. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite finie λ, alors λ ne peut prendre que l'une des deux valeurs l_1 ou l_2.

3. **Dans cette question, on suppose :** $u_0 < l_1$.

   3.1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n < l_1$.

   3.2. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   3.3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Justifier la réponse.

4. **Dans cette question, on suppose :** $u_0 \in]1, l_2[$.

   4.1. Démontrer que $l_2 < u_1 < 2$.

Dans les questions qui suivent, on note $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies pour tout entier naturel n, par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

4.2. Prouver que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ et $w_{n+1} = f \circ f(w_n)$.

4.3. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$1 < v_n < l_2 \quad \text{et} \quad l_2 < w_n < 2.$$

4.4. Pour tout réel x, calculer $f \circ f(x)$.

4.5. Déterminer a et b réels tels que, pour tout réel x,

$$f \circ f(x) - x = \left(-x^2 + x + 1\right)\left(x^2 + ax + b\right).$$

4.6. Déterminer les valeurs du réel x telles que $f \circ f(x) - x = 0$. En déduire le signe de $f \circ f(x) - x = 0$ pour x appartenant à l'intervalle $]1, 2[$.

4.7. En étudiant le signe de $v_{n+1} - v_n$ pour n entier naturel, démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Montrer par la même méthode que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

4.8. Prouver que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et (w_n) sont convergentes et préciser la limite de chacune d'entre elles.

4.9. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Justifier la réponse.

Problème II

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Etant donné un réel strictement positif p, on désigne par $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = -\frac{p}{2}$ et par F le point de coordonnées $(0, \frac{p}{2})$. On considère l'ensemble des points M du plan équidistants du point F et de la droite $\mathcal{D}$ c'est à dire tels que

$$MF = MH$$

où H est le projeté orthogonal de M sur la droite $\mathcal{D}$. Par définition, cet ensemble est la parabole $\mathcal{P}$ de directrice $\mathcal{D}$ et de foyer F.

Pour répondre aux différentes questions, il est vivement conseillé de faire plusieurs schémas qui pourront servir de supports aux divers raisonnements.

Question préliminaire

On désigne par K le projeté orthogonal de F sur la droite $\mathcal{D}$. Vérifier que O appartient à la parabole $\mathcal{P}$ et que O est le milieu du segment $[FK]$.
O est appelé sommet de la parabole.

Partie I : Etude de quelques propriétés de la parabole et de ses tangentes

1. Soit M un point du plan de coordonnées (x, y).

1.1. Déterminer les coordonnées de H projeté orthogonal de M sur la droite $\mathcal{D}$.

1.2. Déterminer une équation de l'ensemble des points M du plan tels que $MF^2 = MH^2$.

1.3. En déduire que la parabole $\mathcal{P}$ de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$ a pour équation $y = \frac{1}{2p}x^2$ dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

2. En choisissant 2 cm pour unité graphique dans le plan, tracer la parabole $\mathcal{P}_0$ correspondant au cas $p = \frac{1}{2}$. On placera sur le graphique le foyer F_0 et la directrice $\mathcal{D}_0$ de la parabole.

On revient maintenant au cas général où p est un réel strictement positif quelconque.

3. Soient M_0 un point de la parabole $\mathcal{P}$ d'abscisse x_0 et H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur la droite $\mathcal{D}$.

3.1. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}_0$ en M_0 à la parabole $\mathcal{P}$. Préciser la tangente au sommet de la parabole ; cette droite sera désignée par d.

3.2. Montrer que la droite $\mathcal{T}_0$ est la médiatrice du segment $[FH_0]$.

3.3. Soit T_0 le point d'intersection de la tangente $\mathcal{T}_0$ en M_0 à la parabole $\mathcal{P}$ avec la droite $\mathcal{D}$. Que représente la droite $\mathcal{T}_0$ pour l'angle $\widehat{H_0T_0F}$?

3.4. Montrer que les droites (FT_0) et (FM_0) sont perpendiculaires.

3.5. Soit f_0 le projeté orthogonal de F sur la tangente $\mathcal{T}_0$ en M_0 à $\mathcal{P}$. Montrer que f_0 est un point de la droite d.

4. Soient A et B deux points de la parabole $\mathcal{P}$ d'abscisses respectives a et b avec $a < b$. Les tangentes en A et B à la parabole $\mathcal{P}$ se coupent au point Q.

4.1. Déterminer les coordonnées des points A, B et Q.

4.2. On désigne par I le milieu du segment $[AB]$ et par E le point d'intersection de la droite (IQ) avec la parabole $\mathcal{P}$. Montrer que les droites (IQ) et $\mathcal{D}$ sont perpendiculaires. Déterminer les coordonnées du point E ; vérifier que E est milieu du segment $[IQ]$.

4.3. Montrer que la droite qui passe par les points α et β milieux respectifs des segments $[AQ]$ et $[BQ]$ est tangente en E à la parabole $\mathcal{P}$.

Partie II : On s'intéresse dans cette partie à la construction « à la règle et au compas » des tangentes à la parabole $\mathcal{P}$ issues d'un point donné du plan.

1. On appelle :

« intérieur de la parabole $\mathcal{P}$ » l'ensemble des points M du plan de coordonnées (x, y) tels que $y > \dfrac{1}{2p}x^2$,

« extérieur de la parabole $\mathcal{P}$ » l'ensemble des points M du plan de coordonnées (x, y) tels que $y < \dfrac{1}{2p}x^2$.

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les distances du point M au point F et du point M à la droite $\mathcal{D}$ pour que ce point M appartienne à l'intérieur (respectivement à l'extérieur) de la parabole $\mathcal{P}$.

2. Soit M_0 un point de la parabole $\mathcal{P}$, H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur la droite $\mathcal{D}$ et $\mathcal{T}_0$ la tangente à la parabole $\mathcal{P}$ au point M_0.

2.1. Montrer que pour tout point N de la droite $\mathcal{T}_0$, $NH_0 = NF$.

2.2. Montrer que tout point N de la droite $\mathcal{T}_0$, distinct de M_0, est extérieur à la parabole $\mathcal{P}$.

2.3. N désigne un point du plan. Déterminer le nombre de tangentes à la parabole $\mathcal{P}$ passant par N selon la position de N dans le plan.

2.4. Dans le cas où il existe deux tangentes à la parabole $\mathcal{P}$ passant par le point N, déduire des questions précédentes une construction « à la règle et au compas » de ces tangentes.

Partie III : On s'intéresse dans cette partie à la construction « à la règle et au compas » du ou des points d'intersection de la parabole $\mathcal{P}$ de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$ avec une droite du plan, s'il(s) existe(nt).

Le point F et la droite $\mathcal{D}$ étant donnés, on désigne par Δ une droite du plan.

1. Etude de deux cas particuliers.

1.1. Construire le (ou les) point(s) d'intersection de la droite Δ et de la parabole $\mathcal{P}$ lorsque la droite Δ est perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}$.

1.2. Construire, s'ils existent, le (ou les) point(s) d'intersection de la droite Δ et de la parabole $\mathcal{P}$ lorsque la droite Δ est parallèle à la droite $\mathcal{D}$.

2. Prouver que la parabole $\mathcal{P}$ est l'ensemble des centres des cercles passant par le point F et tangents à la droite $\mathcal{D}$.

3. Etude du cas général.

On suppose que la droite Δ n'est ni parallèle, ni perpendiculaire à $\mathcal{D}$. On note T le point d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et de la droite Δ.

3.1. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles centrés sur la droite Δ et tangents à la droite $\mathcal{D}$. Montrer que le cercle $\mathcal{C}'$ est l'image du cercle $\mathcal{C}$ par une homothétie de centre T.

On suppose dans les deux questions suivantes qu'il existe au moins un point M de la parabole P appartenant à la droite Δ.

3.2. Montrer que tout cercle centré sur la droite Δ et tangent à la droite $\mathcal{D}$ coupe la droite (TF) en au moins un point.

3.3. Proposer une construction « à la règle et au compas » du ou des points d'intersection de la droite Δ avec la parabole $\mathcal{P}$ lorsque ces points existent.

Partie IV : On se propose dans cette partie de déterminer, par deux méthodes différentes, l'aire d'un « « segment » de parabole c'est à dire l'aire de la partie de plan délimitée par un arc de parabole et la corde qui le sous-tend.

Dans cette partie, on considère toujours la parabole $\mathcal{P}$ de directrice $\mathcal{D}$ et de foyer F admettant dans le repère orthononnal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ l'équation $y = \dfrac{1}{2p}x^2$. A et B sont deux points de la parabole $\mathcal{P}$; les tangentes en A et B à $\mathcal{P}$ se coupent au point Q.

1. Méthode analytique

On note a et b les abscisses respectives des points A et B avec $a < b$.

1.1. Déterminer l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABQ.

1.2. Déterminer une équation de la droite (AB).

1.3. Déterminer l'aire $\mathcal{A}'$ de la partie de plan délimitée par l'arc de parabole $\overset{\frown}{AB}$ et la corde $[AB]$ en fonction de $\mathcal{A}$.

1.4. Quelle relation existe-t-il entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$?

2. Méthode géométrique

Les résultats des questions 2.1. à 2.4. sont utilisés par Archimède dans son ouvrage sur la « quadrature du segment de parabole ».

I désigne le milieu du segment $[AB]$, E l'intersection de la droite (IQ) avec la parabole $\mathcal{P}$; α et β sont les milieux respectifs des segments $[AQ]$ et $[BQ]$.

On admet que tout point situé à l'intérieur ou sur les côtés du triangle AEB appartient à la partie de plan délimitée par l'arc de parabole $\overset{\frown}{AB}$ et la corde $[AB]$ qui le sous-tend et que tout point de cette partie du plan est situé à l'intérieur ou sur les côtés du triangle ABQ.

2.1. Montrer que E est le milieu du segment $[\alpha\beta]$.

2.2. Exprimer l'aire du triangle ABE en fonction de $\mathcal{A}$, aire du triangle ABQ et justifier l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{2}\mathcal{A} \leq \mathcal{A}' \leq \mathcal{A}.$$

2.3. On désigne par K et K' les milieux respectifs des segments $[AE]$ et $[BE]$ et, par L et L', les points d'intersection de la parabole $\mathcal{P}$ respectivement avec les droites (αK) et $(\beta K')$.

2.3.1. Exprimer l'aire des triangles AEL et EBL' en fonction de $\mathcal{A}$, aire du triangle ABQ.

2.3.2. Exprimer l'aire du triangle $\alpha\beta Q$ à l'aide de $\mathcal{A}$.

2.3.3. Démontrer la double inégalité suivante :

$$\frac{1}{2}\mathcal{A}\left(1 + \frac{1}{4}\right) \leq \mathcal{A}' \leq \mathcal{A}\left(1 - \frac{1}{4}\right).$$

2.4. En itérant n fois (n entier naturel strictement positif) le procédé décrit précédemment, déterminer un encadrement de l'aire $\mathcal{A}'$ de la partie de plan délimitée par l'arc de parabole AB et la corde $[AB]$ en fonction de $\mathcal{A}$.

2.5. Qu'obtient-on par passage à la limite ?

2.6. A quelle époque et où vivait Archimède ? Citer au moins un résultat scientifique et au moins une invention technologique attribués à Archimède.

4.2 Solution

PROBLEME I

I.1. La fonction trinôme du second degré $f(x) = -x^2+2x+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et la fonction dérivée $f'(x) = -2x+2$ s'annule en $x = 1$, est strictement positive si $x < 1$, et strictement négative si $x > 1$. La fonction f est donc strictement croissante sur $]-\infty, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

I.2.

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0.$$

Le discriminant de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ est $\Delta = 5$, donc cette équation admet deux solutions réelles

$$l_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \simeq -0,618\,03 \quad \text{et} \quad l_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,618.$$

On reconnaît le nombre d'or l_2.

I.3. Puisque f est strictement croissante sur $]-\infty, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$, on a

$$\begin{cases} x < l_1 \Rightarrow f(x) < f(l_1) \Leftrightarrow f(x) < l_1 \\ 1 < x < 2 \Rightarrow f(1) = 2 > f(x) > f(2) = 1 \Leftrightarrow 1 < f(x) < 2. \end{cases}$$

I.4.

x	$-\infty$		l_1		1		l_2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$		$-$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	l_1	$\nearrow$	2	$\searrow$	l_2	$\searrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

I.5. La courbe représentative C_f est dessinée plus loin. Les abscisses des points d'intersection de C_f et de l'axe Ox sont solutions de $f(x) = -x^2+2x+1 = 0$. On trouve $x = 1 \pm \sqrt{2}$.

I.6. Le graphe de f et la première bissectrice D ont été dessinés avec MuPad, en utilisant la commande :

plotfunc2d(GridLines = Automatic, Ticks =[Steps=1,Steps=1],
Scaling=Constrained, -x^2+2*x+1,x,x=-4..4, y=-4..4)

La courbe C_f coupe D en deux points de coordonnées (l_1, l_1) et (l_2, l_2). La courbe C_f est au-dessus de D si et seulement si $f(x) \geq x$, ce qui équivaut à $x^2 - x - 1 \leq 0$ et donc à $l_1 \leq x \leq l_2$. Cela se vérifie sur le graphique de la FIG. 4.1.

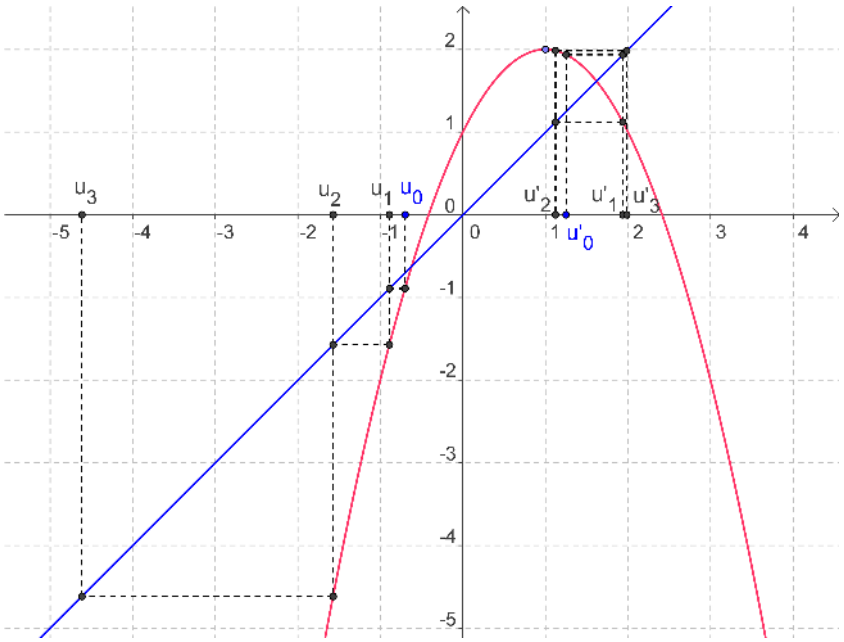


FIG. 4.1 – Graphe de f

II.1. La suite (u_n) semble tendre vers $-\infty$ lorsque $u_0 = -0,7$, et adopte un comportement bizarre lorsque $u_0 = 1,25$. Attention : sur le graphique, on a utilisé la même notation (u_n) pour les deux suites, puisqu'aucune confusion n'est possible.

II.2. Si (u_n) tend vers une limite finie λ, il suffit de passer à la limite dans les égalités $f(u_n) = u_{n+1}$ (vérifiées pour tout entier n) pour obtenir $f(\lambda) = \lambda$ (on utilise ici la continuité de f). Ainsi $\lambda = l_1$ ou l_2.

II.3.1. On raisonne par récurrence sur n. La propriété est vraie si $n = 0$ puisque $u_0 < l_1$. Si elle est vraie au rang n, alors $u_n < l_1$, et la croissance de f sur $]-\infty, 1]$ entraîne $f(u_n) = u_{n+1} < f(l_1) = l_1$, autrement dit $u_{n+1} < l_1$. La propriété est encore vraie au rang $n+1$.

II.3.2. Montrons les inégalités $u_{n+1} \leq u_n$ par récurrence sur n. Le trinôme $f(x) - x = -x^2 + x + 1$, qui admet deux racines l_1 et l_2, est strictement négatif lorsque $x < l_1$. L'inégalité $u_0 < l_1$ entraîne donc $f(u_0) - u_0 < 0$, d'où $u_1 \leq u_0$. La propriété annoncée est donc vraie si $n = 0$. Si l'on suppose ensuite que $u_{n+1} \leq u_n$, on obtient

$$u_{n+1} \leq u_n < l_1 \leq 1$$

d'après II.3.1, de sorte que u_{n+1} et u_n appartiennent tous les deux à l'intervalle $]-\infty, 1]$. La croissance de f sur $]-\infty, 1]$ permet alors d'écrire

$$u_{n+1} \leq u_n \Rightarrow f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \Leftrightarrow u_{n+2} \leq u_{n+1},$$

et l'inégalité est démontrée au rang $n+1$.

II.3.3. Supposons que (u_n) converge vers une limite finie λ. Puisque (u_n) est décroissante,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq u_0 < l_1 < l_2,$$

et il suffit de passer à la limite dans ces inégalités pour obtenir $\lambda \leq u_0 < l_1 < l_2$. C'est absurde, puisque λ doit être égal à l_1 ou l_2 d'après II.2. En conclusion, la suite (u_n) n'est pas convergente.

Remarque : La suite (u_n) est décroissante et ne converge pas dans $\mathbb{R}$, donc tend vers $-\infty$, ce que laissait prévoir le dessin.

II.4.1. On a $1 < u_0 < l_2$ et f est strictement décroissante sur $]1, l_2[$, donc $f(1) > f(u_0) > f(l_2)$, ou encore $l_2 < u_1 < 2$.

II.4.2. On a $v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f \circ f(u_{2n}) = f \circ f(v_n)$ et de la même manière $w_{n+1} = u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f \circ f(u_{2n+1}) = f \circ f(w_n)$.

II.4.3. Montrons que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 < v_n < l_2$$

par récurrence sur n. La propriété est triviale au rang 0 car $v_0 = u_0 \in]1, l_2[$. Supposons maintenant que $1 < v_n < l_2$ pour un certain entier naturel n. D'après I.3, la fonction f vérifie $f(]1, 2[) \subset]1, 2[$, et d'après I.1, f est décroissante sur $]1, 2[$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} 1 < v_n < l_2 < 2 &\Rightarrow f(1) > f(v_n) > f(l_2) > f(2) \\ &\Rightarrow 2 > f(v_n) > l_2 > 1 \\ &\Rightarrow f(2) < f \circ f(v_n) < f(l_2) < f(1) \\ &\Rightarrow 1 < v_{n+1} < l_2 < 2, \end{aligned}$$

et les inégalités $1 < v_{n+1} < l_2$ sont démontrées au rang $n+1$. La preuve des inégalités $l_2 < w_n < 2$ est similaire.

II.4.4.

$$\begin{aligned} f \circ f(x) &= f\left(-x^2+2x+1\right) \\ &= -\left(-x^2+2x+1\right)^2 + 2\left(-x^2+2x+1\right) + 1 \\ &= -x^4+4x^3-4x^2+2. \end{aligned}$$

II.4.5. On a

$$\left\{ \begin{array}{l} f \circ f(x) - x = -x^4+4x^3-4x^2-x+2 \\ \text{et} \\ \left(-x^2+x+1\right)\left(x^2+ax+b\right) = -x^4+(1-a)x^3+(a-b+1)x^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +(a+b)x+b. \end{array} \right.$$

L'identité annoncée sera vraie si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} 1-a=4 \\ a-b+1=-4 \\ a+b=-1 \\ b=2. \end{array} \right.$$

Ce système est compatible, et admet l'unique solution $(a,b) = (-3,2)$. On peut donc conclure à $f \circ f(x) - x = \left(-x^2+x+1\right)\left(x^2-3x+2\right)$.

II.4.6. En factorisant les deux trinômes du second degré intervenant dans la factorisation précédente, on obtient

$$f \circ f(x) - x = -(x-l_1)(x-l_2)(x-1)(x-2).$$

Les racines de $f \circ f(x) - x$ sont donc l_1, 1, l_2 et 2. Lorsque $x \in]1,2[$, $x-l_1$ est positif, $x-1$ est positif et $x-2$ est négatif. Le signe de $f \circ f(x) - x$ est alors celui de $x-l_2$, autrement dit :

- Si $x \in]1,l_2[$, alors $f \circ f(x) - x < 0$,
- Si $x \in]l_2,2[$, alors $f \circ f(x) - x > 0$,

et bien entendu $f \circ f(l_2) - l_2 = 0$.

II.4.7. La question II.4.3 donne $1 < v_n < l_2$ et $l_2 < w_n < 2$. L'étude du signe de $f \circ f(x) - x$ faite en II.4.6 permet alors d'écrire

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{n+1} - v_n = f \circ f(v_n) - v_n < 0 \\ w_{n+1} - w_n = f \circ f(w_n) - w_n > 0, \end{array} \right.$$

ceci quel que soit l'entier n. On a prouvé que (v_n) est décroissante tandis que (w_n) est croissante.

II.4.8. La suite (v_n) est décroissante minorée par 1, donc converge dans $\mathbb{R}$. Si $\mu = \lim v_n$, il suffit de passer à la limite dans les égalités $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ pour obtenir $\mu = f \circ f(\mu)$ (f étant continue), donc $\mu \in \{l_1, 1, l_2, 2\}$. Comme $1 < v_n \leq v_0 < l_2$ entraîne aussi $1 \leq \mu \leq v_0$ par passage à la limite, la seule possibilité restante pour μ est $\mu = 1$. En conclusion $\lim v_n = 1$.
On montrerait de la même façon que $\lim v_n = 2$.

II.4.9. La suite (u_n) n'est certainement pas convergente. On peut seulement affirmer qu'elle possède deux valeurs d'adhérences distinctes : 1 et 2. Pour montrer rigoureusement que (u_n) ne converge pas, on peut raisonner par l'absurde et supposer - un court instant - qu'il existe un réel l tel que $\lim u_n = l$. Dans ce cas, toute sous-suite de (u_n) converge nécessairement vers la même limite l, et en particulier $\lim u_{2n} = 1 = l$ et $\lim u_{2n+1} = 2 = l$, ce qui est impossible !

PROBLEME II

Question préliminaire. Le point K a pour coordonnées $(0, -p/2)$. Les demi-sommes des coordonnées de K et F sont donc nulles, et l'origine O du repère est le milieu de $[FK]$. Puisque $OF = OK = p/2$, O est à égale distance de F et de la directrice $\mathcal{D}$, donc appartient à $\mathcal{P}$.

I.1.1. On a $H(x, -p/2)$. On peut le vérifier à postériori en constatant que le point H de coordonnées $(x, -p/2)$ appartient bien à $\mathcal{D}$ (il vérifie l'équation $y = -p/2$ de $\mathcal{D}$) et satisfait

$$\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{i} = \begin{pmatrix} x - x \\ -\frac{p}{2} - y \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

I.1.2.

$$MF^2 = MH^2 \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{p}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 = 2py.$$

I.1.3. M appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si $MF = MH$, ce qui équivaut à $MF^2 = MH^2$ et donc à $x^2 = 2py$ puisque les distances MF et MH sont toujours positives.

I.2. La FIG. 4.2 représente la parabole d'équation $y = x^2$. Le foyer F est de coordonnées $(0, 1/4)$.I.3.1. La pente de $\mathcal{T}_0$ est

$$\left(\frac{1}{2p}x^2\right)|'_{x_0} = \frac{x_0}{p},$$

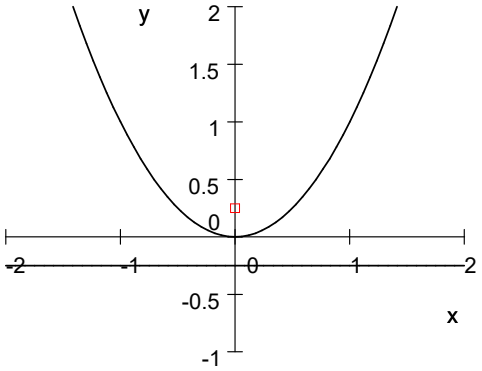


FIG. 4.2 – Parabole d'équation $y = x^2$

donc $\mathcal{T}_0$ admet l'équation

$$y = \frac{x_0}{p}(x - x_0) + \frac{x_0^2}{2p}.$$

Si $x_0 = 0$, M_0 est le sommet de $\mathcal{P}$ et la tangente à $\mathcal{P}$ en ce point admet l'équation $y = 0$. On reconnaît l'axe Ox des abscisses. Ainsi $d = Ox$.

I.3.2. La médiatrice Δ de $[FH_0]$ est perpendiculaire à (FH_0) et passe par M_0 (puisque $M_0H_0 = M_0F$). La tangente $\mathcal{T}_0$ passe aussi par M_0. Montrer que $\mathcal{T}_0 = \Delta$ revient donc à prouver que $\mathcal{T}_0$ est perpendiculaire à (FH_0) (on utilise ici le résultat bien connu : par un point donné il existe une et une seule perpendiculaire à une droite donnée).
On vérifie donc, par le calcul, que le vecteur directeur $\overrightarrow{u}(1, x_0/p)$ de $\mathcal{T}_0$ est orthogonal à $\overrightarrow{FH_0}$:

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{FH_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{x_0}{p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 - 0 \\ -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} \end{pmatrix} = x_0 + \frac{x_0}{p}(-p) = 0.$$

I.3.3. Par hypothèse, $T_0 \in \mathcal{T}_0$. Puisque $\mathcal{T}_0$ est médiatrice de $[FH_0]$, les deux demi-droites $[T_0H_0)$ et $[T_0F)$ sont symétriques par rapport à $\mathcal{T}_0$, et cela prouve que $\mathcal{T}_0$ est la bissectrice intérieure issue de T_0 du triangle T_0H_0F. C'est la bissectrice de $\widehat{H_0T_0F}$.

I.3.4. Les deux triangles $T_0H_0M_0$ et T_0FM_0 sont symétriques par rapport à $\mathcal{T}_0$, et $T_0H_0M_0$ est rectangle en H_0, donc T_0FM_0 sera rectangle en F.

I.3.5. Puisque $\mathcal{T}_0$ est la médiatrice de $[FH_0]$,

- $\mathcal{T}_0$ coupe $[FH_0]$ en son milieu que je noterai f_0,
- $(Ff_0) \perp \mathcal{T}_0$.

Cela prouve que le milieu f_0 de $[FH_0]$ coïncide avec le projeté orthogonal de F sur $\mathcal{T}_0$. L'homothétie $h_{F,1/2}$ de centre F et de rapport $1/2$ transforme H_0 en f_0, et la directrice $\mathcal{D}$ en une droite parallèle à $\mathcal{D}$ et passant par $h_{F,1/2}(K) = O$, c'est-à-dire $d = Ox$. Ainsi $h_{F,1/2}(\mathcal{D}) = d$ et

$$H_0 \in \mathcal{D} \Rightarrow h_{F,1/2}(H_0) \in h_{F,1/2}(\mathcal{D}) \Leftrightarrow f_0 \in d.$$

I.4.1. On a

$$A\begin{pmatrix} a \\ \frac{a^2}{2p} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B\begin{pmatrix} b \\ \frac{b^2}{2p} \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées x et y de Q sont solutions du système

$$(S) \quad \begin{cases} y = \frac{a}{p}(x-a) + \frac{a^2}{2p} \\ y = \frac{b}{p}(x-b) + \frac{b^2}{2p} \end{cases}$$

donc vérifient

$$\frac{a}{p}(x-a) + \frac{a^2}{2p} = \frac{b}{p}(x-b) + \frac{b^2}{2p}$$

ou encore

$$\left(\frac{a}{p} - \frac{b}{p}\right)x = \frac{a^2}{2p} - \frac{b^2}{2p}$$

$$x = \frac{a+b}{2}.$$

Par suite

$$y = \frac{a}{p}\left(\frac{a+b}{2} - a\right) + \frac{a^2}{2p} = \frac{ab}{2p}.$$

Réciproquement, on vérifie que le couple $((a+b)/2, ab/2p)$ est bien solution du système (S). On a donc

$$Q\left(\frac{a+b}{2}, \frac{ab}{2p}\right).$$

I.4.2. On a

$$I = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} \\ \frac{1}{2}\left[\frac{a^2}{2p} + \frac{b^2}{2p}\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} \\ \frac{a^2+b^2}{4p} \end{pmatrix}$$

et

$$\overrightarrow{IQ}.\overrightarrow{i} = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} - \frac{a+b}{2} \\ \frac{ab}{2p} - \frac{a^2+b^2}{4p} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Cela montre que (IQ) et $\mathcal{D}$ sont perpendiculaires. E est donc le point de la parabole d'abscisse celle de I. On peut donc écrire :

$$E = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} \\ \frac{1}{2p}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} \\ \frac{(a+b)^2}{8p} \end{pmatrix}.$$

E est bien le milieu de $[IQ]$ puisque les coordonnées de E sont les demi-sommes des coordonnées de I et Q. En effet

$$\frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2}\right)$$

et

$$\frac{(a+b)^2}{8p} = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2+b^2}{4p} + \frac{ab}{2p}\right).$$

I.4.3. Puisque α et β sont les milieux respectifs de $[AQ]$ et $[BQ]$, la droite $(\alpha\beta)$ est parallèle à (AB) (c'est une application du Théorème de la droite des milieux, ou de la réciproque du Théorème de Thalès si l'on préfère). La droite $(\alpha\beta)$, passant par β et parallèle à (BI) coupera $[IQ]$ en son milieu E (encore le Théorème de la droite des milieux ou... le Théorème de Thalès). Ainsi $E \in (\alpha\beta)$.

Montrer que la droite $(\alpha\beta)$ est la tangente à $\mathcal{P}$ issue de E revient maintenant à montrer que ces droites ont la même pente. On calcule donc ces pentes, et on les compare.

▶ Pente p_1 de la tangente à $\mathcal{P}$ issue de E :

$$p_1 = \frac{a+b}{2p}.$$

▶ Pente p_2 de $(\alpha\beta)$: Les coordonnées de α et β sont

$$\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(a + \frac{a+b}{2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{2p} + \frac{ab}{2p}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3a+b}{4} \\ \frac{a^2+ab}{4p} \end{pmatrix} \text{ et } \beta = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(b + \frac{a+b}{2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{2p} + \frac{ab}{2p}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a+3b}{4} \\ \frac{ab+b^2}{4p} \end{pmatrix},$$

donc

$$p_2 = \frac{1}{p}\frac{b^2-a^2}{2b-2a} = \frac{a+b}{2p} = p_1.$$

II.1. En reprenant les calculs et les notations de I.1.2,

$$\begin{aligned} MF < MH &\Leftrightarrow MF^2 < MH^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 < \left(y + \frac{p}{2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{2p} < y \Leftrightarrow \ M \text{ est à l'intérieur de } \mathcal{P}. \end{aligned}$$

De la même manière,

$$MF > MH \Leftrightarrow \frac{x^2}{2p} > y \Leftrightarrow \ M \text{ est à l'extérieur de } \mathcal{P}.$$

II.2.1. D'après I.3.2, $\mathcal{T}_0$ est la médiatrice de $[FH_0]$. Tout point N de $\mathcal{T}_0$ sera donc à égale distance de F et H_0.

II.2.2. L'équation de $\mathcal{T}_0$ a été donnée en I.3.1 :

$$\mathcal{T}_0 : \quad y = \frac{x_0}{p}(x - x_0) + \frac{x_0^2}{2p}. \quad (\sharp)$$

Pour tout $N(x, y)$ appartenant à $\mathcal{T}_0 \setminus \{M_0\}$, on a

$$\begin{aligned} N \text{ à l'extérieur de } \mathcal{P} &\Leftrightarrow y = \frac{x_0}{p}(x - x_0) + \frac{x_0^2}{2p} < \frac{x^2}{2p} \\ &\Leftrightarrow 0 < (x - x_0)\left(\frac{x + x_0}{2} - x_0\right) \\ &\Leftrightarrow 0 < (x - x_0)^2. \end{aligned}$$

La dernière inégalité étant toujours vérifiée, on peut affirmer que tout point N de $\mathcal{T}_0 \setminus \{M_0\}$ est à l'extérieur de la parabole.

Remarque : Donnons une preuve géométrique de la question II.2.2. Notons encore T_0 l'intersection de $\mathcal{T}_0$ et de $\mathcal{D}$. Si $N \in \mathcal{T}_0 \setminus \{M_0\}$, notons H et N' les projetés orthogonaux respectifs de N sur $\mathcal{D}$ et (FT_0) (FIG. 4.3). Puisque N appartient à $\mathcal{T}_0$ et que $\mathcal{T}_0$ est la bissectrice intérieure issue de T_0 du triangle T_0H_0F (I.3.3), on a $NH = NN'$ $(\sharp)$.Par ailleurs $N \neq M_0$ entraîne $N' \neq F$, et le Théorème de Pythagore donne

$$NN'^2 + N'F^2 = NF^2,$$

d'où $NN' < NF$ $(\flat)$. Finalement $(\sharp)$ et $(\flat)$ donnent $NH < NF$, et cela prouve que N est à l'extérieur de la parabole (voir la CNS de la question II.1).

II.2.3. D'après II.2.2, tout point N situé à l'intérieur de la parabole ne peut appartenir à une tangente à la parabole. Un autre cas est évident : il s'agit du cas où N appartient à $\mathcal{P}$, puisqu'il existe alors une seule tangente à $\mathcal{P}$ passant par N, et sa pente est connue (c'est x_N/p si $N(x_N, y_N)$).

Il reste à envisager le cas où $N(x_N, y_N)$ est extérieur à $\mathcal{P}$. On suppose donc que $y_N < x_N^2/2p$, et l'on cherche combien de points $M_0(x_0, y_0)$ de $\mathcal{P}$ sont tels que la droite d'équation $(\sharp)$ contienne N. On cherche donc tous les réels x_0 tels que

$$y_N = \frac{x_0}{p}(x_N - x_0) + \frac{x_0^2}{2p}.$$

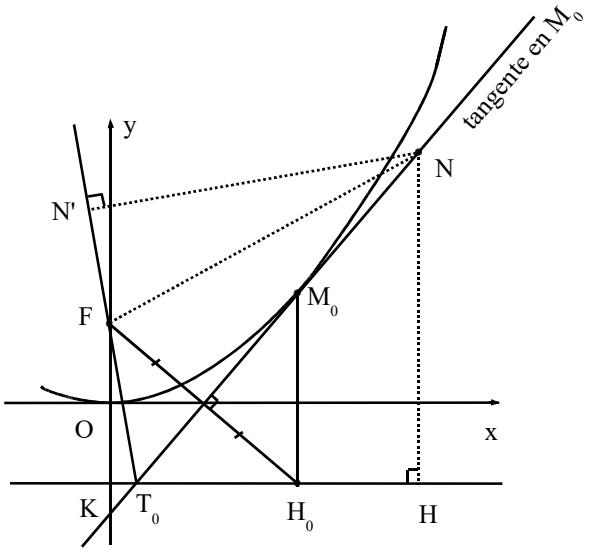


FIG. 4.3 – Question II.2.2

Cette équation équivaut à

$$\frac{x_0^2}{2p} - \frac{x_N}{p}x_0 + y_N = 0, \quad \text{soit à } x_0^2 - 2x_N x_0 + 2py_N = 0.$$

Le discriminant réduit de cette équation du second degré est $\Delta' = x_N^2 - 2py_N$. Comme $\Delta' > 0$, l'équation admettra deux solutions distinctes, et il existera exactement 2 tangentes à $\mathcal{P}$ passant par N.

En conclusion : Il existe zéro, une ou deux tangentes à $\mathcal{P}$ passant par N suivant que N soit à l'intérieur, sur, ou à l'extérieur de la parabole.

II.2.4. La question I.4 nous permet de trouver une construction des deux tangentes à $\mathcal{P}$ issues de N lorsque N est extérieur à la parabole. Conservons les mêmes notations qu'en I.4, à l'exception du point Q que nous appellerons dorénavant N. Il s'agit de construire les points A et B de $\mathcal{P}$ tels que les tangentes à $\mathcal{P}$ issues de ces points passent par N.

Voici le programme de construction :

• Construire la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ issue de N. Celle-ci coupe $\mathcal{P}$ en E, et $\mathcal{D}$ en H (FIG. 4.4).

• Construire la tangente $\mathcal{T}_0$ à $\mathcal{P}$ en E (c'est facile : c'est la médiatrice de $[FH]$ d'après I.3.2). Avec les notations de I.4, on a $\mathcal{T}_0 = (\alpha\beta)$ et $(\alpha\beta)$ est parallèle à (AB) d'après le Théorème de la droite des milieux).

• Construire le symétrique I de N par rapport à E.

• La parallèle Δ à $\mathcal{T}_0 = (\alpha\beta)$ passant par I n'est autre que la droite (AB), donc Δ coupe $\mathcal{P}$ en A et B, et les tangentes à $\mathcal{P}$ issues de A et B passeront par N (I.4). Il suffit de tracer les droites (AN) et (BN) pour obtenir les deux tangentes cherchées.

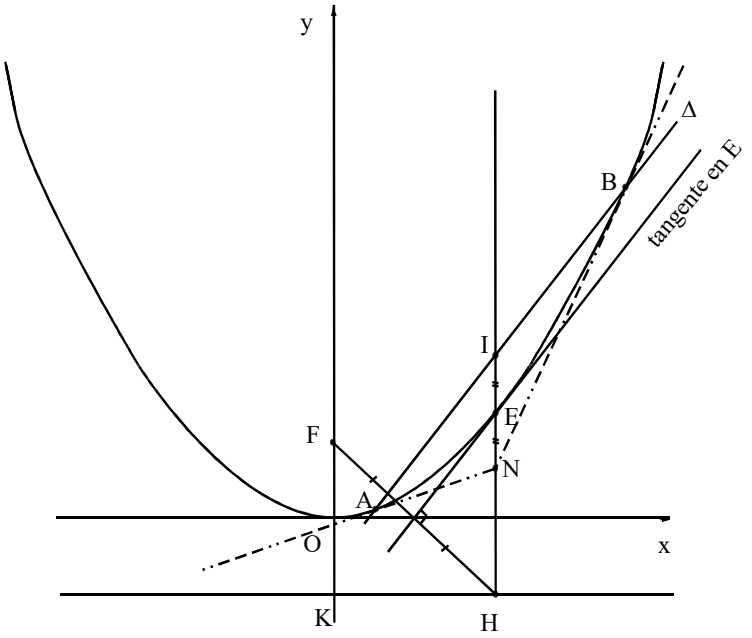


FIG. 4.4 – Question II.2.4

Remarque : Nous avons résolu la question II.2.3 en utilisant des coordonnées, et répondu à la question II.2.4 en utilisant I.4. Voyons ici une autre façon de répondre à ces deux questions. Il s'agit de déterminer le nombre de tangentes à $\mathcal{P}$ passant par N, et de les construire le cas échéant.

Si $M_0 \in \mathcal{P}$, le point N appartient à la tangente $\mathcal{T}_0$ à $\mathcal{P}$ issue de M_0 si et seulement si $NF = NH_0$, où H_0 désigne le projeté de M_0 sur $\mathcal{D}$ (I.3.2). Par suite H_0 est l'une des intersections de $\mathcal{D}$ et du cercle $\mathcal{C}(N, NF)$ de centre N et de rayon NF. Réciproquement, la donnée d'un point H_0 appartenant à $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}(N, NF)$ permet de construire un point M_0 appartenant à $\mathcal{P}$ et à la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ issue de H_0, et par construction la médiatrice de $[FH_0]$ contient N, autrement dit N appartient à la tangente à $\mathcal{P}$ issue de M_0 (toujours I.3.2).
Trouver et construire les tangentes à $\mathcal{P}$ issues de N revient donc à trouver les

intersections de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}(N, NF)$.

Notons H le projeté orthogonal de N sur $\mathcal{D}$, et $\delta = \mathrm{d}(N, \mathcal{D}) = NH$ la distance de N à $\mathcal{D}$. On sait (position relative d'une droite et d'un cercle, [2], Théorème 170) que la droite $\mathcal{D}$ coupe le cercle $\mathcal{C}(N, NF)$ en 0, 1 ou 2 points suivant que $\delta = NH$ soit strictement supérieur, égal ou strictement inférieur à NF. Il suffit donc d'appliquer la caractérisation II.1 pour énoncer :

Le nombre de tangentes à $\mathcal{P}$ issues de N est :

- 0 si $\delta = NH > NF$, autrement dit si N est à l'intérieur de $\mathcal{P}$,
- 1 si $\delta = NH = NF$, autrement dit si $N \in \mathcal{P}$,
- 2 si $\delta = NH < NF$, autrement dit si N est à l'extérieur de $\mathcal{P}$.

La discussion précédente nous donne une méthode simple de construction des tangentes issues de N (FIG. 4.5). Comme en II.2.4, supposons qu'il existe deux tangentes à $\mathcal{P}$ issues de N. D'après la discussion, cela signifie que le cercle $\mathcal{C}(N, NF)$ coupe la directrice $\mathcal{D}$ en deux points distincts H_1 et H_2. Les deux tangentes cherchées sont alors les médiatrices des segments $[FH_1]$ et $[FH_2]$, et les points de contact de ces tangentes avec la parabole sont les intersections de $\mathcal{P}$ et des perpendiculaires à $\mathcal{D}$ issues de H_1 et H_2.

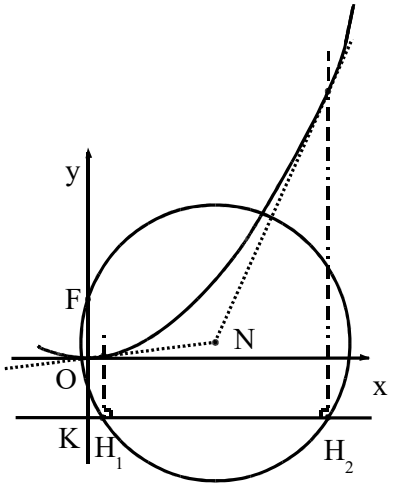


FIG. 4.5 – Tangentes à la parabole abaissées de N

III.1.1. Δ coupe $\mathcal{D}$ en H, et l'unique point d'intersection de Δ et $\mathcal{P}$ sera à l'intersection de Δ et de la médiatrice de $[FH]$.

III.1.2. Si Δ est parallèle à la directrice $\mathcal{D}$, notons W l'intersection de Δ et de l'axe focal Oy. Si $M \in \Delta \cap \mathcal{P}$, et si H désigne le projeté orthogonal de M

sur $\mathcal{D}$, le quadrilatère $WMHK$ possède trois angles droits, et c'est donc un rectangle. Le Théorème de Pythagore permet d'écrire

$$KH^2 = WM^2 = FM^2 - WF^2 = MH^2 - WF^2 = WK^2 - WF^2,$$

de sorte que

$$KH^2 = WK^2 - WF^2 \quad (*)$$

De trois choses l'une :

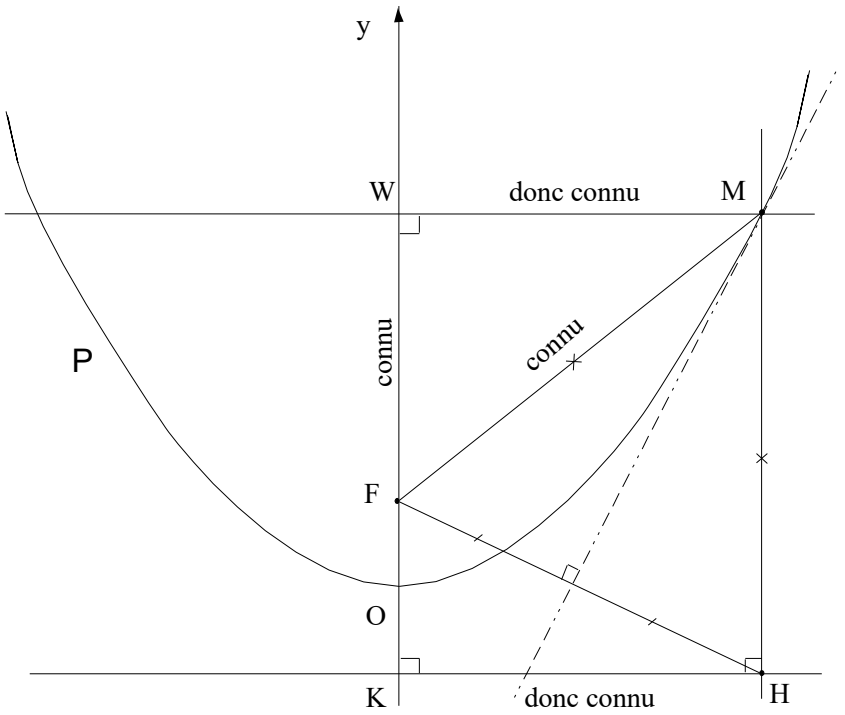


FIG. 4.6 – Cas où $WK > WF$

• Si $WK > WF$, $(*)$ s'écrit $KH = \sqrt{WK^2 - WF^2}$ et détermine deux points H sur la droite $\mathcal{D}$. Notons-les H_1 et H_2. Les points de $\Delta \cap \mathcal{P}$ sont alors les points de $\mathcal{P}$ d'abscisses celles de H_1 et H_2. Leur construction à la règle et au compas ne pose pas de problème, la seule difficulté étant de tracer (n'importe où sur la figure) un segment de longueur $\sqrt{WK^2 - WF^2}$ connaissant les longueurs WK et WF, ce qui se fait facilement en utilisant le Théorème de Pythagore (FIG. 4.6).

• Si $WK = WF$, alors $W = O$ est le milieu de $[KF]$, et $(*)$ donne $K = H$. La droite Δ coupe $\mathcal{P}$ en son sommet et coïncide avec la tangente au sommet de la parabole.

• Si $WK < WF$, aucun point H de $\mathcal{D}$ vérifie $(*)$, et la droite Δ ne coupe pas $\mathcal{P}$.

III.2. Si $M \in \mathcal{P}$, alors $MF = MH$ (avec les notations usuelles du problème) et le cercle $\mathcal{C}_M$ de centre M et de rayon MF passe par F et admet $\mathcal{D}$ comme tangente (en effet $\mathcal{D}$ est orthogonale en H au rayon $[MH]$ du cercle $\mathcal{C}_M$ par hypothèse, donc $\mathcal{D}$ est bien la tangente à $\mathcal{C}_M$ issue de H).
Réciproquement, supposons que M soit le centre d'un cercle $\mathcal{C}_M$ passant par F et tangent à $\mathcal{D}$. Si H désigne l'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}_M$, on constate que (MH) est orthogonale à $\mathcal{D}$, et donc que H est le projeté de M sur $\mathcal{D}$. Et par hypothèse $MF = MH$, ce qui montre que M appartient à $\mathcal{P}$.

III.3.1. Notons M et M' les centres de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ (FIG. 4.7). Notons H et H' les points de contact de $\mathcal{D}$ et des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Supposons $\mathcal{C} \neq \mathcal{C}'$, autrement l'identité constitue une bonne homothétie qui transforme $\mathcal{C}'$ en $\mathcal{C}$. L'homothétie h de centre T et de rapport $k = \overline{TH}/\overline{TH'}$ transforme H' en H, mais aussi M' en M puisque le Théorème de Thalès donne

$$k = \frac{\overline{TH}}{\overline{TH'}} = \frac{\overline{TM}}{\overline{TM'}}.$$

L'image de $\mathcal{C}'$ par h est donc un cercle de centre $h(M') = M$ et de rayon

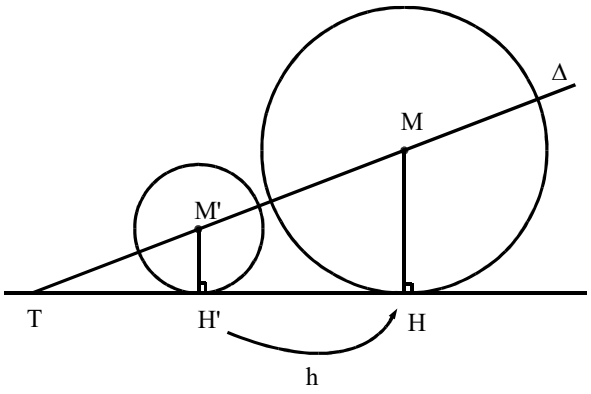


FIG. 4.7 – Question III.3.1

$kM'H$. Le Théorème de Thalès dans le triangle donne encore

$$k = \frac{\overline{TH}}{\overline{TH'}} = \frac{\overline{TM}}{\overline{TM'}} = \frac{\overline{MH}}{\overline{M'H'}},$$

de sorte que $kM'H' = MH$, et $h(\mathcal{C}') = \mathcal{C}$.

III.3.2. Si tel n'était pas le cas, il existerait au moins un cercle $\mathcal{C}$ centré en $M \in \Delta$, tangent à $\mathcal{D}$, et tel que $\mathcal{C} \cap (TF) = \varnothing$. Considérons alors un cercle quelconque $\mathcal{C}'$ centré en $M' \in \Delta$ et tangent à $\mathcal{D}$. La question précédente montre l'existence d'une homothétie h telle que $h(\mathcal{C}') = \mathcal{C}$, et puisque h est bijective :

$$\mathcal{C}' \cap (TF) = h^{-1}(\mathcal{C}) \cap h^{-1}(TF) = h^{-1}(\mathcal{C} \cap (TF)) = h^{-1}(\varnothing) = \varnothing.$$

On vient de prouver que tout cercle centré sur Δ et tangent à $\mathcal{D}$ ne coupe pas (TF), ce qui est absurde puisque l'on a supposé qu'il existait au moins un point N dans $\mathcal{P} \cap \Delta$ (utiliser la définition de $\mathcal{P}$ donnée en III.2).

III.3.3. On choisit un point M_0 sur Δ, puis on trace le cercle $\mathcal{C}_0$ de centre M_0 et tangent à $\mathcal{D}$ en un point que l'on appelle H_0 (FIG. 4.8). D'après III.3.2, ce cercle coupe (TF) en un ou deux points.

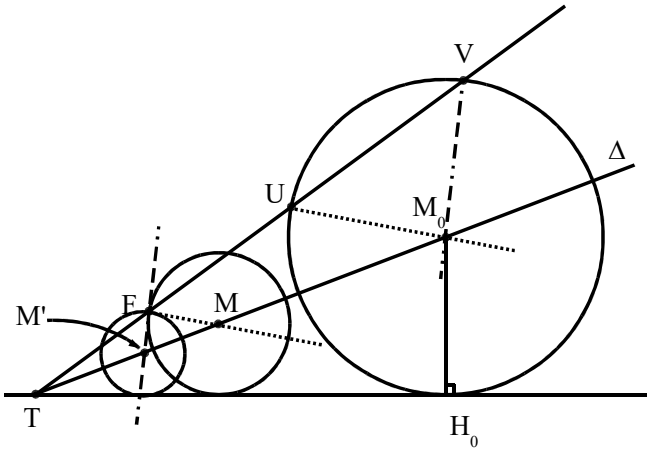


FIG. 4.8 – Construction de la question III.3.3

Raisonnons en nous plaçant dans le second cas où $\mathcal{C}_0 \cap (TF) = \{U, V\}$ (l'autre cas se traitant de la même façon).
Trouver les points de $\mathcal{P} \cap \Delta$ revient à trouver les centres M des cercles passant par F et tangents à $\mathcal{D}$, autrement dit à construire de tels cercles qui sont tous, d'après III.3.1, des images de $\mathcal{C}_0$ par une homothétie convenable h.

Cette homothétie doit donc vérifier $h(U) = F$ ou $h(V) = F$ pour être associée aux cercles recherchés. Puisqu'il existe exactement deux homothéties h_U et h_V de centre T vérifiant $h_U(U) = F$ et $h_V(V) = F$, on retrouve les deux points d'intersection de $\mathcal{P} \cap \Delta$.

Le Théorème de Thalès permet de construire effectivement les images $h_U(\mathcal{C}_0)$ et $h_V(\mathcal{C}_0)$ du cercle $\mathcal{C}_0$ par ces deux homothéties (voir dessin), et les centres des deux cercles ainsi obtenus sont les deux points M et M' de $\mathcal{P} \cap \Delta$ que l'on recherchait. Sur le dessin ci-dessous, M (resp. M') est l'intersection de Δ et de la parallèle à (UM_0) (resp. (VM_0)) passant par F.

IV.1.1. Reprenons les notations de la question I.4. On a

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{QB})\right|$$

et

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{QB}) &= \begin{vmatrix} a - \frac{a+b}{2} & b - \frac{a+b}{2} \\ \frac{a^2}{2p} - \frac{ab}{2p} & \frac{b^2}{2p} - \frac{ab}{2p} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2p}\begin{vmatrix} \frac{a-b}{2} & -\frac{a-b}{2} \\ a(a-b) & b(b-a) \end{vmatrix} \\ &= -\frac{(a-b)^2}{4p}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = -\frac{(b-a)^3}{4p},\end{aligned}$$

donc

$$\mathcal{A} = \frac{(b-a)^3}{8p}.$$

IV.1.2. Une équation de la droite (AB) passant par les points $A(a, a^2/2p)$ et $B(b, b^2/2p)$ est :

$$y = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2}{2p} - \frac{a^2}{2p}\right)(x-a) + \frac{a^2}{2p}$$

soit

$$(AB): \quad y = \frac{a+b}{2p}x - \frac{ab}{2p}.$$

IV.1.3.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}' &= \int_a^b \left(\frac{a+b}{2p}x - \frac{ab}{2p} - \frac{x^2}{2p}\right) \\ &= \frac{a+b}{4p}\left[b^2 - a^2\right] - \frac{ab}{2p}\left[b-a\right] - \frac{1}{6p}\left[b^3 - a^3\right] \\ &= \frac{b-a}{12p}\left[3(a+b)^2 - 6ab - 2\left(b^2 + ab + a^2\right)\right] = \frac{(b-a)^3}{12p} = \frac{2}{3}\mathcal{A}.\end{aligned}$$

IV.1.4. Le rapport $\mathcal{A}'/\mathcal{A}$ vaut 2/3.

IV.2.1. (FIG. 4.9) En I.4.2 et I.4.3, on a démontré que E était le milieu de $[IQ]$ et que les points E, α, β étaient alignés sur la tangente à $\mathcal{P}$ en E.

Puisque α est milieu de $[AQ]$ et puisque E est milieu de $[IQ]$, le Théorème de la droite des milieux appliqué au triangle AIQ (ou si l'on préfère la réciproque du Théorème de Thalès et le Théorème de Thalès appliqué au triangle) montre que la droite $(E\alpha)$ est parallèle à (AB) et $E\alpha = AI/2$. De la même manière, on montre que $(E\beta)$ est parallèle à (AB) et

$$E\beta = \frac{BI}{2} = \frac{AI}{2} = E\alpha.$$

Les droites $(E\alpha)$ et $(E\beta)$, passant par E et parallèles à une même troisième, sont donc égales, et $E\beta = E\alpha$. Cela prouve que E est bien le milieu de $[\alpha\beta]$.

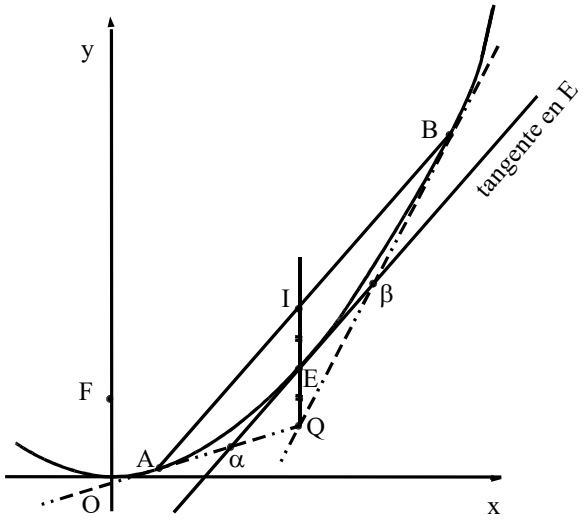


FIG. 4.9 – Question IV.2.1

IV.2.2. Notons e et q les projetés orthogonaux de E et Q sur (AB). Comme une projection conserve les milieux, le milieu E de $[IQ]$ (I.4.2) se projette sur le milieu e de $[Iq]$. Le Théorème de Thalès appliqué aux triangles IeE et IqQ donne $2 \times eE = qQ$. Par suite, l'aire $\mathcal{A}_{ABE}$ du triangle ABE vaut :

$$\mathcal{A}_{ABE} = \frac{AB \times eE}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{AB \times qQ}{2} = \frac{1}{2}\mathcal{A}.$$

Comme on a admis que les points intérieurs au triangle ABE sont intérieurs à la partie de la courbe située entre la corde et la parabole, et que ces derniers points sont intérieurs au triangle ABQ, on déduit

$$\mathcal{A}_{ABE} \leq \mathcal{A}' \leq \mathcal{A}$$

ou encore

$$\frac{1}{2}\mathcal{A} \leq \mathcal{A}' \leq \mathcal{A}.$$

IV.2.3.1. La configuration liée au triangle ABE et déjà étudiée est reproduite avec les triangles AEL et EBL'. En notant systématiquement $\mathcal{A}_{LMN}$ l'aire d'un triangle LMN, on trouve (en utilisant IV.2.2) :

$$\mathcal{A}_{AEL} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{AE\alpha}$$

et

$$\mathcal{A}_{AE\alpha} = \mathcal{A}_{E\alpha Q} = \frac{\mathcal{A}_{AEQ}}{2} = \frac{\mathcal{A}_{AIE}}{2} = \frac{\mathcal{A}_{ABE}}{4} = \frac{\mathcal{A}}{8}$$

donc

$$\mathcal{A}_{AEL} = \frac{\mathcal{A}}{16}.$$

De la même manière, on trouverait

$$\mathcal{A}_{EBL'} = \frac{\mathcal{A}}{16}.$$

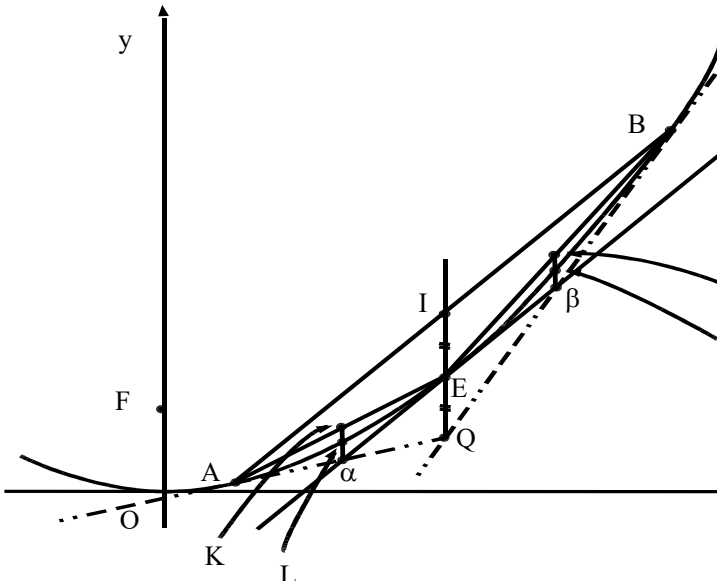


FIG. 4.10 – Question IV.2.3.1

IV.2.3.2. Le triangle $\alpha\beta Q$ est l'image du triangle ABQ par l'homothétie de centre Q et de rapport $1/2$, donc

$$\mathcal{A}_{\alpha\beta Q} = \frac{1}{4}\mathcal{A}_{ABQ} = \frac{\mathcal{A}}{4}.$$

IV.2.3.3. Compte tenu des hypothèses faites sur les intérieurs des triangles qui interviennent, on obtient

$$\mathcal{A}_{ABE} + \mathcal{A}_{AEL} + \mathcal{A}_{EBL'} \leq \mathcal{A}' \leq \mathcal{A}_{ABQ} - \mathcal{A}_{\alpha\beta Q},$$

soit

$$\frac{1}{2}\mathcal{A} + \frac{\mathcal{A}}{16} + \frac{\mathcal{A}}{16} \leq \mathcal{A}' \leq \mathcal{A} - \frac{\mathcal{A}}{4},$$

ou encore

$$\frac{1}{2}\mathcal{A}\left(1 + \frac{1}{4}\right) \leq \mathcal{A}' \leq \mathcal{A}\left(1 - \frac{1}{4}\right).$$

IV.2.4. On continue en nommant les milieux de $[AL]$, $[LE]$, $[EL']$, $[L'B]$ ... pour obtenir, au pas suivant :

$$\frac{1}{2}\mathcal{A}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2}\right) \leq \mathcal{A}' \leq \mathcal{A}\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4^2}\right).$$

En itérant n fois le procédé, on obtient :

$$\frac{1}{2}\mathcal{A}\left(1 + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{4^n}\right) \leq \mathcal{A}' \leq \mathcal{A}\left(1 - \frac{1}{4} - ... - \frac{1}{4^n}\right).$$

IV.2.5. Les séries géométriques qui interviennent dans l'encadrement précédent sont convergentes. En passant à la limite, on trouve

$$\frac{1}{2}\mathcal{A} \times \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4^k} \leq \mathcal{A}' \leq \mathcal{A} \times \left(1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4^k}\right).$$

Puisque

$$\sum_{k=0}^{+\infty k} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3},$$

on obtient

$$\frac{2}{3}\mathcal{A} \leq \mathcal{A}' \leq \frac{2}{3}\mathcal{A}, \quad \text{soit } \mathcal{A}' = \frac{2}{3}\mathcal{A} \text{ comme en IV.1.4.}$$

IV.2.6. Archimède vécu à Syracuse, en Sicile (dans la Grande Grèce) au troisième siècle avant J.-C. On lui doit l'invention de la vis sans fin (qui permettait de puiser de l'eau au fond d'un puits) et la découverte de la célèbre poussée qui porte son nom (la poussée d'Archimède explique pourquoi certains corps flottent sur l'eau et d'autres non). Ce mathématicien, physicien et philosophe mourut lors de la prise de Syracuse par les romains.

4.3 Compléments sur Archimède

J'ai répondu de mémoire à la question IV.2.6, et l'énoncé ne demande après tout qu'une seule invention et qu'une seule découverte obtenues par le savant. Ce problème est sans doute l'occasion de nous pencher un peu sur la vie et l'oeuvre de ce grand philosophe...

On apprend qu'Archimède naquit à Syracuse en -287, et que son père était le célèbre astronome Phidias qui avait déterminé le rapport entre les grandeurs du Soleil et de la Lune. On pense qu'il séjourna un certain temps à Alexandrie, grand centre intellectuel de l'époque, pour suivre l'enseignement de Conon de Samos, puis retourna dans sa ville natale pour ne plus la quitter.
Ami du roi Hiéron, il inventa le levier (« Donnez-moi un point d'appui et je soulèverai le monde ! »), la vis sans fin (vis d'Archimède) et les roues dentées. On dit qu'il découvrit la célèbre poussée qu'un fluide imprime à un solide en... y réfléchissant dans son bain, et qu'il se serait levé en criant « Eurêka ! » (« J'ai trouvé ! »).

Les légions du consul romain Marcellus assiégaient la ville, et Archimède mit toutes ses connaissances au service de Hiéron en construisant des machines de guerre défensives vraiment machiavéliques. Il y avait par exemple des « machines à lancer des flèches », et des « mains de fer » qui soulevaient les bateaux ennemis qui s'approchaient trop près des remparts. Ces « mains de fer » utilisaient le principe des leviers. L'idée était, dans un premier temps, de bombarder la galère à l'aide de pierres afin que tout l'équipage reflue à l'arrière du navire, puis, dans un deuxième temps de déployer un énorme levier associé à un système de poulies et de chaînes, et de jeter un grappin sur l'avant du navire pour le soulever de l'eau. Les pierres roulaient alors vers l'arrière du bateau, achevant de le déstabiliser. Celui-ci s'enfonçait, et il ne restait plus qu'à libérer rapidement le grappin.

A l'issue d'un siège de trois ans, les légions investirent la ville. Plutarque raconte qu'un soldat romain surgit près d'un vieillard qui effectuait des tracés sur le sable. Celui-ci lui demanda de ne pas abîmer ses cercles, et le soldat romain, se sentant insulté, se jeta simplement sur lui, et le tua. Archimède meurt en -212 à l'âge de 75 ans.

Archimède est le premier géomètre à proposer une **méthode de calcul du périmètre d'un cercle**, et donc de π, avec une erreur qui peut être rendue aussi petite qu'on le désire (c'est la méthode d'Archimède de calcul de π). Pour ce faire, il utilise des polygones réguliers inscrits et exinscrits au cercle. En partant d'un hexagone régulier et, en doublant quatre fois le nombre de ses

cotés, il obtient des polygones à $6 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 96$ côtés, et l'encadrement

$$3 + \frac{10}{71} = \frac{223}{71} \leq \pi \leq 3 + \frac{10}{70} = \frac{22}{7}$$

soit

$$3,140\,8 \leq \pi \leq 3,142\,9.$$

En physique, Archimède :

▶ écrit une **théorie des leviers** qui explique enfin le principe d'équilibre de deux objets posés sur une planche de part et d'autre d'un support. A ce titre, il est le précurseur du barycentre de deux points ;

▶ énonce une **règle de composition des forces** ;

▶ écrit une **théorie du centre de gravité** ;

▶ précise les **lois de base de l'hydrostatique** ;

▶ construit de nombreuses **machines** utilisant des leviers, des poulies, des cordes, des chaînes et des roues dentées (machines de traction qui décuplaient les forces mises en jeu, vis sans fin, planétaire à l'aide d'engrenages, miroirs paraboliques pour concentrer les rayons solaires...).

Chapitre 5

Année 2006

5.1 Énoncé

Problème 1

Notations

Dans le problème, pour toute fonction h définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, on note h' sa fonction dérivée.
On note $\mathbf{E}$ l'ensemble des fonctions f définies et continues sur l'intervalle $[0,1]$, dérivables sur l'intervalle $[0,1[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et vérifiant les propriétés suivantes :

- $f(0) = f(1) = 0$;
- f' est dérivable sur $[0,1[$ et on note f'' sa fonction dérivée ;
- $\forall x \in [0,1[\,,\ f'(x) \geq 0$;
- $\forall x \in [0,1[\,,\ f''(x) \geq 0$.

Pour toute fonction f de $\mathbf{E}$, on note :

- $\widetilde{f}$ la fonction associée à f, définie sur l'intervalle $[0,1]$ par $\widetilde{f}(x) = x - f(x)$;
- $I(f)$ le réel défini par $I(f) = 2\displaystyle\int_0^1 \widetilde{f}(x)\,dx = 2\int_0^1 (x - f(x))\,dx$.

$I(f)$ est appelé l'indice de Gini de f.

On admettra que si une fonction f continue sur l'intervalle $[0,1]$ est monotone ou strictement monotone sur l'intervalle $]0,1[$, il en est de même sur l'intervalle $[0,1]$.

Partie I : Étude de quelques éléments de E

1. Soit f la fonction numérique de variable réelle x définie sur l'intervalle $[0,1]$ par :

$$f(x) = \lambda\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right)$$

où λ est le nombre réel tel que $f(1) = 1$.

1.1 Préciser la valeur de λ.

1.2 Démontrer que f est un élément de **E**.

1.3 Démontrer que pour tout x appartenant à $[0,1]$: $x - f(x) \geq 0$.

1.4 Dresser le tableau de variation de f. On précisera les valeurs exactes prises par f' en 0 et 1.

1.5 Tracer la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 10 cm.

1.6 *Application économique. On peut considérer que la fonction f rend compte de la concentration des richesses des habitants d'un pays donné. Par exemple, $f(0.3) \approx 0.19$ signifie que 30% des habitants (les plus pauvres) possèdent environ 19% des richesses du pays. Dans ces conditions, l'indice de Gini donne une indication sur la concentration des richesses dans ce pays.*
Calculer l'indice de Gini pour le pays considéré. En donner une interprétation graphique.

2. Soit n un entier naturel strictement positif et f_n la fonction numérique de la variable réelle x définie sur l'intervalle $[0,1]$ par : $f_n(x) = x^n$.

2.1 Démontrer que f_n est un élément de **E**.

2.2 Calculer $I(f_n)$.

2.3 Démontrer que la suite $(I(f_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite.

3. Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1 et g_n la fonction numérique de la variable réelle x définie sur l'intervalle $[0,1]$ par :

$$g_n(x) = 1 - (1-x)^{\frac{1}{n}}.$$

3.1 Démontrer que g_n est un élément de **E**.

3.2 Calculer $I(g_n)$. Comparer $I(f_n)$ et $I(g_n)$ pour tout entier naturel $n > 1$.

3.3 Dans cette question, on suppose $n = 2$.

3.3.1 Résoudre dans l'intervalle $]0, 1[$ l'équation $f_2(x) = g_2(x)$.

3.3.2 Justifier le sens de variation des fonctions f_2 et g_2.

3.3.3 Donner sous la forme d'un tableau les valeurs de $f_2\left(\frac{p}{10}\right)$ et les arrondis au centième de $g_2\left(\frac{p}{10}\right)$ pour p entier compris entre 0 et 10.

3.3.4 Tracer les courbes représentatives de f_2 et de g_2 dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 10 cm.

3.3.5 Donner une interprétation graphique de la relation qui existe entre $I(f_2)$ et $I(g_2)$.

3.3.6 Dans le cas où f_2 et g_2 rendent compte de la concentration des richesses des habitants de deux pays différents, que vaut l'indice de Gini pour chacun de ces deux pays ? Dans ce cas, l'indice de Gini vous semble-t-il signifiant ?

Partie II : Quelques propriétés de la fonction $\widetilde{f}$

On considère dans cette partie, une fonction f élément de $\mathbf{E}$ et $\widetilde{f}$ la fonction associée à f.

1. Démontrer que pour tout x appartenant à $[0, 1]$: $\widetilde{f}(x) \leq x$.
2. Dans cette question on étudie la fonction $\widetilde{f'}$ dérivée de $\widetilde{f}$.

   2.1 Étudier le sens de variation de la fonction $\widetilde{f'}$ sur $[0, 1[$.

   2.2 Démontrer que si l'on suppose que, pour tout x appartenant à $]0, 1[$, $\widetilde{f'}(x) < 0$, on aboutit à une impossibilité.
   De même, démontrer que si l'on suppose que, pour tout x appartenant à $]0, 1[$, $\widetilde{f'}(x) > 0$, on aboutit à une impossibilité.

   2.3 En déduire qu'il existe un élément x_0 de $]0, 1[$ tel que $\widetilde{f'}(x_0) = 0$.
3. Démontrer que $\widetilde{f'}(0)$ est égal à 0 si et seulement si la fonction $\widetilde{f}$ est nulle sur $[0, 1]$. Que peut-on dire alors de la fonction f ?
4. On suppose dans cette question que $\widetilde{f'}(0) \neq 0$.

   4.1 Étudier le signe de $\widetilde{f'}$ sur $[0, 1[$ et préciser les variations de $\widetilde{f}$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

   4.2 Justifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0, 1[$: $\widetilde{f}(x) > 0$.

   4.3 En déduire que la fonction $\widetilde{f}$ admet sur $[0, 1]$ un maximum, strictement positif, atteint en x_0.

Partie III : Quelques propriétés de l'indice de Gini

Les résultats de la partie **II** *pourront être utilisés pour résoudre les questions de la partie* **III**.

Dans toute cette partie, f désigne toujours une fonction de **E** et $\widetilde{f}$ la fonction associée à f.

1. Démontrer que $I(f) \geq 0$.
2. Démontrer que $I(f) \leq 1$.
3. Dans cette question, on veut démontrer que $I(f) < 1$.

   3.1 Prouver que, pour tout réel α appartenant à $[0,1[$, on a :

   $$\int_0^1 f(x)\,dx \geq f(\alpha)(1-\alpha).$$

   3.2 Démontrer que la condition $f(1) = 1$ implique l'existence d'un réel α_0 de l'intervalle $]0,1[$ tel que $f(\alpha_0) \geq \dfrac{1}{2}$.

   3.3 En déduire que $I(f) < 1$.

4. À l'aide de la question **2.3.** de la partie **I**, démontrer que, quel que soit le réel $A < 1$, on peut trouver une fonction f de **E** telle que $I(f) > A$.
5. Dans cette question, on suppose que $\widetilde{f}'(0) \neq 0$ et on considère x_0 appartenant à l'intervalle $]0,1[$ tel que $\widetilde{f}'(x_0) = 0$.
   On note φ la fonction numérique de la variable x définie sur l'intervalle $[0, x_0]$ par :

   $$\varphi(x) = \widetilde{f}(x) - M\frac{x}{x_0}$$

   où $M = \widetilde{f}(x_0)$.

   5.1 Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi(x_0)$.

   5.2 Justifier que $\varphi'(x_0) < 0$ et que φ' s'annule sur l'intervalle $[0, x_0]$.

   5.3 En déduire, pour tout x de l'intervalle $[0, x_0]$, $\widetilde{f}(x) \geq M\dfrac{x}{x_0}$.
   Par un raisonnement analogue, on peut établir le résultat suivant que nous admettrons :

   $$\forall x \in [x_0, 1], \quad \widetilde{f}(x) \geq M\frac{x-1}{x_0-1}.$$

   5.4 En déduire que $I(f) \geq M$.

6. Soit H la fonction numérique de la variable x définie sur l'intervalle $[0,1]$ par :

$$H(x) = \int_0^x \widetilde{f}(t)\, dt.$$

6.1 Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0,1]$, $H(x) \geq 0$.

6.2 Prouver que H est une fonction croissante sur $[0,1]$.

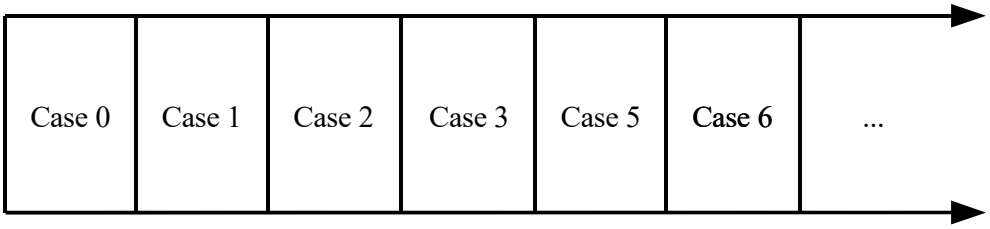
6.3 Démontrer que si $I(f) = 0$ alors H est la fonction nulle.

6.4 En déduire que si $I(f)$ alors pour tout x appartenant à $[0,1]$, $f(x) = x$.

Problème 2

Les parties I, II et III qui constituent le problème 2 sont indépendantes les unes des autres.

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à déplacer un jeton sur une piste composée de cases numérotées à partir de 0 ; l'opérateur dispose d'un dé cubique parfaitement équilibré dont chaque face porte un numéro. Le dé étant parfaitement équilibré, chaque face a la même probabilité d'apparaître lors d'un lancer.



Les modalités de l'expérience sont les suivantes :
- *au départ, le jeton est sur la case 0 ;*
- *l'opérateur lance le dé ;*
- *il déplace le jeton de la gauche vers la droite d'un nombre de cases égal au résultat donné par le dé lors du lancer ;*
- *puis l'opérateur relance le dé et déplace le jeton selon la procédure précédente autant de fois que nécessaire.*

Au cours de l'expérience, N désignant un entier strictement positif :
- *on dit que la case N est* ***atteinte au*** *i-***ème lancer** *lorsque c'est la case sur laquelle arrive le jeton au i-ème lancer ;*
- *on dit que la case N est* ***dépassée au*** *i-***ème lancer** *si une case de numéro* ***supérieur ou égal à*** *N est atteinte au i-ème lancer.*

Partie I

Dans cette partie, le dé porte sur trois de ses faces le numéro 1 **et sur les trois autres faces le numéro** 2.

1. Déterminer les probabilités des événements suivants :

   A_1 : « atteindre la case 1 au 1er lancer »
   A_2 : « atteindre la case 2 au 1er lancer »
   A_3 : « atteindre la case 3 au 1er lancer »
   B_1 : « atteindre la case 1 au 2ème lancer »
   B_2 : « atteindre la case 2 au 2ème lancer »
   B_3 : « atteindre la case 3 au 2ème lancer »
   B_4 : « atteindre la case 4 au 2ème lancer »
   B_5 : « atteindre la case 5 au 2ème lancer »

   On considère la variable aléatoire X_n où n est un entier strictement supérieur à 1 telle que :
   - si i désigne un entier strictement supérieur à 1, $X_n = i$ si la case n est dépassée au i-ème lancer et ne l'était pas au $(i-1)$-ème lancer,
   - $X_n = 1$ si la case n est dépassée au 1-er lancer.

2. **Cas où** $n = 2$

   2.1 Exprimer les événements $\{X_2 = 1\}$ et $\{X_2 = 2\}$ à l'aide des événements de probabilité non nulle définis dans la question précédente.

   2.2 Quelles sont les valeurs prises par X_2 ?

   2.3 Déterminer la loi de probabilité de X_2.

3. **Cas où** $n = 3$

   3.1 On note (x_1, x_2) le couple correspondant aux deux résultats successifs donnés par le dé lors des deux premiers lancers. Énumérer tous les couples (x_1, x_2) correspondants à la réalisation de l'événement $\{X_3 = 2\}$.

   3.2 On note (x_1, x_2, x_3) le triplet correspondant aux trois résultats successifs donnés par le dé lors des trois premiers lancers. Énumérer tous les triplets (x_1, x_2, x_3) correspondant à la réalisation de l'événement $\{X_3 = 3\}$.

   3.3 Déterminer la valeur minimale m_3 prise par X_3.

   3.4 Déterminer la valeur maximale M_3 prise par X_3.

   3.5 Déterminer la loi de probabilité de X_3.

4. **Cas où** $n = 4$

4.1 Quelles sont les valeurs prises par X_4 ?

4.2 On note (x_1, x_2, x_3) le triplet correspondant aux trois résultats successifs donnés par le dé lors des trois premiers lancers. Énumérer tous les triplets (x_1, x_2, x_3) correspondants à la réalisation de l'événement $\{X_4 = 3\}$.

4.3 Déterminer la loi de probabilité de X_4.

5. **Cas où n est un entier quelconque ($n > 1$)**

5.1 Soit p un entier appartenant à l'intervalle $[\frac{n}{2}, n]$. On désigne par $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ un p-uplet d'entiers tels que pour tout i appartenant à $\{1, 2, \cdots, p\}$, $x_i = 1$ ou $x_i = 2$.

5.1.1 Soit q un entier compris entre 0 et p. Déterminer le nombre de p-uplets $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ comportant exactement q éléments égaux à 2.

5.1.2 Soit $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ un p-uplet tel que $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n$. Exprimer en fonction de n et de p le nombre q des éléments de ce p-uplet égaux à 2.

5.1.3 En déduire, en fonction de n et de p, le nombre de p-uplets $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ tels que $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n$.

5.2 Justifier que les valeurs prises par X_n appartiennent à l'intervalle $\left[\frac{n}{2}, n\right]$.

5.3 Soit p un entier appartenant à l'intervalle $\left[\frac{n}{2}, n\right]$ et $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ le p-uplet correspondant aux p résultats successifs donnés par le dé lors des p premiers lancers.

5.3.1 Démontrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :
- $X_n = p$
- $[(x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n)$ ou $(x_1 + x_2 + \cdots + x_{p-1} = n - 1$ et $x_p = 2)]$.

5.3.2 Calculer $P(X_n = p)$, probabilité de l'événement $\{X_n = p\}$.

Partie II

Dans cette partie, le dé porte sur deux de ses faces le numéro 1, **sur deux autres faces le numéro** 2 **et sur les deux dernières faces le numéro** 3.

On considère la variable aléatoire Y_n où n est un entier strictement supérieur à 1 telle que :

– si i désigne un entier strictement supérieur à 1, $Y_n = i$ si la case n est dépassée au i-ème lancer et ne l'était pas au $(i-1)$-ème lancer
– $Y_n = 1$ si la case n est dépassée au 1-er lancer.

1. L'opérateur lance le dé. Soit k un entier appartenant à l'intervalle $[1, 3]$. Quelle est la probabilité d'obtenir le numéro k ?
2. Expliquer pourquoi les valeurs prises par Y_n sont $2, 3$ ou 4.
3. On note (y_1, y_2) le couple correspondant aux deux résultats successifs donnés par le dé lors des deux premiers lancers. Énumérer tous les couples (y_1, y_2) correspondants à la réalisation de l'événement $\{Y_4 = 2\}$.
4. On note (y_1, y_2, y_3, y_4) le quadruplet correspondant aux quatre résultats successifs donnés par le dé lors des quatre premiers lancers. Énumérer tous les quadruplets (y_1, y_2, y_3, y_4) correspondants à la réalisation de l'événement $\{Y_4 = 4\}$.
5. Déterminer la loi de probabilité de Y_4.
6. Calculer l'espérance et la variance de Y_4.

Partie III

Dans cette partie, le dé porte sur deux de ses faces le numéro 1, **sur deux autres faces le numéro** 2 **et sur les deux dernières faces le numéro** 3.

On désigne par Z_n la variable aléatoire égale au numéro de la case atteinte au n-ème lancer lorsque le joueur lance le dé n fois, n étant un entier strictement positif.
On note $P(Z_n = j)$ la probabilité de l'événement $\{Z_n = j\}$ où j désigne un entier.

1. Déterminer les valeurs prises par Z_1, Z_2 et Z_3 puis les lois de probabilité de Z_1, Z_2 et Z_3.
2. Déterminer les valeurs prises par Z_n dans le cas général.
3. Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et k un entier compris entre 1 et 3. Interpréter l'événement $\{Z_n - Z_{n-1} = k\}$ en terme de lancer de dé.
4. Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et j un entier tel que l'événement $\{Z_n = j\}$ soit non vide. Déterminer les valeurs de l'entier j pour lesquelles chacune des probabilités suivantes $P(Z_{n-1} = j-1)$, $P(Z_{n-1} = j-2)$, $P(Z_{n-1} = j-3)$ est non nulle.
5. Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 et pour tout entier j compris entre $n+1$ et $3n-2$, on a la relation suivante :

$$\{Z_n = j\} = \bigcup_{i=1}^{3} \left(\{Z_{n-1} = j-k\} \bigcap \{Z_n - Z_{n-1} = k\} \right).$$

Cette égalité est-elle encore vérifiée pour tout entier j compris entre n et $3n$?

6. En déduire l'existence de a, b, c réels non nuls tels que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 et pour tout entier j compris entre n et $3n$, on ait la relation suivante :

$$P(Z_n = j) = aP(Z_{n-1} = j-1) + bP(Z_{n-1} = j-2) + cP(Z_{n-1} = j-3)$$

7. On définit la matrice A, à coefficients réels et comportant 10 lignes et 30 colonnes, telle que :

$$\forall i \in \{1, 2, \cdots, 10\},\ \forall j \in \{1, 2, \cdots, 10\},\ a_{ij} = P(Z_i = j).$$

Écrire un algorithme permettant de calculer tous les coefficients de la matrice A.

5.2 Corrigé

Problème 1

I.1.1.

$$f(1) = 1 \ \Leftrightarrow\ \lambda\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1\right) = 1 \ \Leftrightarrow\ \lambda = \frac{6}{11}.$$

I.1.2. f est la restriction à $[0,1]$ d'une fonction polynomiale : à ce titre, elle est deux fois dérivable sur $[0,1]$, donc en particulier continue sur cet intervalle. De plus $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, la dérivée $f'(x) = \lambda\left(x^2 + x + 1\right)$ reste strictement positif sur $[0,1]$ (le trinôme $x^2 + x + 1$ reste en effet positif sur tout $\mathbb{R}$ puisque n'admet que deux racines complexes j et j^2), et $f''(x) = \lambda(2x+1)$ reste positif pour tout $x \in [0, 1[$, comme on le vérifie en écrivant

$$\lambda(2x+1) \geq 0 \ \Leftrightarrow\ x \geq -\frac{1}{2}.$$

Ainsi $f \in \mathbf{E}$.

I.1.3. On a

$$\begin{aligned} x - f(x) \geq 0 &\Leftrightarrow x - \frac{6}{11}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 5x - 3x^2 - 2x^3 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 - 5x \leq 0. \quad (*) \end{aligned}$$

Si $x = 0$, l'inégalité $(*)$ est triviale. Sinon, elle équivaut à $2x^2 + 3x - 5 \leq 0$ et se vérifie facilement en cherchant les racines du trinôme $2x^2 + 3x - 5$. De discriminant $\Delta = 49$, le trinôme $2x^2 + 3x - 5$ admettra les racines

$$\frac{-3 \pm 7}{4} = \begin{cases} 1 \\ \text{ou} \\ -5/2, \end{cases}$$

et sera négatif entre $-5/2$ et 1, et positif ailleurs. Finalement $(*)$ sera vérifiée pour tout $x \in [0, 1]$.

I.1.4. La fonction f est strictement croissante sur $[0, 1]$ puisque de dérivée $f'(x) = \lambda\left(x^2 + x + 1\right)$ strictement positive sur cet intervalle. On obtient $f'(0) = \lambda = 6/11$ et $f'(1) = 3\lambda = 18/11$, et le tableau de variations :

x	0		1
f'	6/11	+	18/11
f	0	↗	1

I.1.5. La FIG. 5.1 montre la courbe représentative de f.

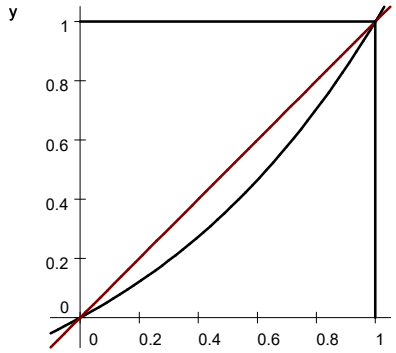


FIG. 5.1 – Graphe de $f(x) = \dfrac{6}{11}\left(\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x\right)$

I.1.6. Ici $\widetilde{f}(x) = x - f(x) = x - \dfrac{6}{11}\left(\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x\right) = \dfrac{1}{11}\left(5x - 3x^2 - 2x^3\right)$, donc

$$I(f) = 2\int_0^1 \widetilde{f}(x)\, dx = \frac{2}{11}\left[\frac{5}{2}x^2 - x^3 - \frac{x^4}{2}\right]_0^1 = \frac{2}{11}.$$

Interprétation graphique : D'après la question I.3, le graphe $\mathcal{G}_f$ de f est toujours situé sous la première bissectrice, et l'intégrale $I(f)$ représente le

double de l'aire de la partie du plan située entre $\mathcal{G}_f$ et cette première bissectrice. On a toujours $I(f) \geq 0$, et l'on parle donc bien d'aire géométrique.
L'indice de Gini permet d'apprécier combien la courbe de concentration des richesses s'éloigne de la courbe "d'égale répartition" représentée par la droite $y = x$.
Plus l'indice est grand, plus l'on peut s'attendre à une répartition inégalitaire, même si, en théorie, l'aire entre les deux courbes concernées peut être "agencée" de façons très différentes : on peut en effet imaginer deux fonctions f et g qui, tout en restant convexes, représentant des indices de concentration de richesses de deux pays, et vérifiant $I(f) = I(g)$, s'éloignent de la première bissectrice beaucoup plus sur l'intervalle $[0, 1/2]$ que sur $[1/2, 1]$ pour f, et beaucoup plus sur l'intervalle $[1/2, 1]$ que sur $[0, 1/2]$ pour g. Si l'indice est alors le même, il correspond à des situations complètement différentes et ne permet pas de comparer ces deux pays !

Remarques et compléments : α) Répondre en parlant du "double de l'aire entre deux courbes", comme nous l'avons fait, suffit pour gagner tous les points prévus dans le barême. Un détour sur les manuels de terminale ES nous permet d'apprendre que l'*indice de Gini*, appelé aussi *indice* (ou *coefficient*) *de concentration*, est le quotient entre *l'aire de concentration* (par définition : l'aire entre $\mathcal{G}_f$ et la droite $y = x$) et l'aire du triangle OAB de sommets de coordonnées $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(1, 1)$. Cela est bien joliment dit.

β) L'interprétation graphique montre que l'indice de Gini :

- est toujours compris entre 0 et 1 car, f étant convexe ($f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0, 1[$ et f une fonction continue sur $[0, 1]$), son graphe $\mathcal{G}_f$ est situé sous la sécante $y = x$. On montre d'ailleurs les inégalités $0 \leq I(f) \leq 1$ aux questions III.1 et III.2.

- est d'autant plus proche de 1 que la répartition est inégalitaire, un indice nul correspondant à une répartition des richesses totalement égalitaire.

γ) La courge $\mathcal{G}_f$ est appelée courbe de Lorenz. A titre d'exemple, la FIG. 5.2 montre la courbe de Lorenz de concentration du patrimoine en actions en France en 1992 et 1998 (source : Rapport Garnier au Sénat [5]). L'indice de Gini de cette courbe en 1998 est $0,917$, à comparer avec l'indice de Gini pour le patrimoine global des ménages qui oscille depuis de nombreuses années entre $0,6$ et $0,7$.

δ) C'est le statisticien et sociologue italien Corrado Gini (1884-1965) qui introduisit cet "indice de concentration" destiné à mesurer le degré d'inégalité dans la répartition des richesses dans une société donnée.

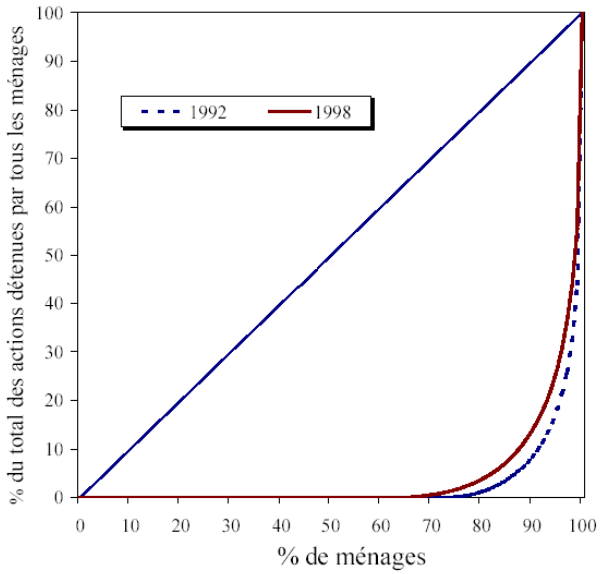


FIG. 5.2 – Courbe de concentration du patrimoine en actions en France

I.2.1. La fonction $f_n(x) = x^n$ est polynomiale, donc de classe C^∞ sur tout $\mathbb{R}$. On a bien $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, et l'on constate que les fonctions dérivées $f_n'(x) = nx^{n-1}$ et $f_n''(x) = n(n-1)x^{n-2}$ restent positives sur $[0,1]$. Donc $f_n \in \mathbf{E}$.

I.2.2.

$$I(f_n) = 2\int_0^1 (x - x^n)\, dx = 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{n-1}{n+1}.$$

I.2.3. Clairement $\lim I(f_n) = \lim \dfrac{n-1}{n+1} = 1$.

I.3.1. La fonction $g_n(x) = 1 - (1-x)^{1/n}$

- est définie et continue sur $]-\infty, 1]$,
- vérifie $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$,
- est dérivable sur $]-\infty, 1[$, de fonction dérivée

$$g_n'(x) = \frac{1}{n}(1-x)^{\frac{1}{n}-1}$$

positive sur $]-\infty, 1[$,

- est deux fois dérivables sur $]-\infty,1]$, et

$$\forall x \in]-\infty,1] \quad g_n''(x) = -\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)(1-x)^{\frac{1}{n}-2} = \frac{n-1}{n^2}(1-x)^{\frac{1}{n}-2} \geq 0.$$

Ainsi $g_n \in \mathbf{E}$.

I.3.2. On connaît une primitive de $x - g_n(x)$ sur $]-\infty,1[$. Comme g_n est continue sur $]-\infty,1]$,

$$\begin{aligned} I(g_n) &= 2\int_0^1 \left(x-1+(1-x)^{1/n}\right) dx \\ &= 2\lim_{A\to 1_-} \int_0^A \left(x-1+(1-x)^{1/n}\right) dx \\ &= 2\lim_{A\to 1_-} \left[\frac{x^2}{2} - x - \frac{(1-x)^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}\right]_0^A \\ &= 2\lim_{A\to 1_-} \left[\frac{A^2}{2} - A - \frac{(1-A)^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} + \frac{1}{\frac{1}{n}+1}\right] \end{aligned}$$

donc

$$I(g_n) = 2\left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{\frac{1}{n}+1}\right) = \frac{n-1}{n+1}.$$

Ainsi $I(g_n) = I(f_n)$ pour tout $n > 1$.

I.3.3.1. Si $x \in]0,1[$,

$$\begin{aligned} f_2(x) = g_2(x) &\Leftrightarrow x^2 = 1-(1-x)^{1/2} \\ &\Leftrightarrow (1-x)^{1/2} \overset{(*)}{=} 1-x^2 \;\Leftrightarrow\; 1-x = \left(1-x^2\right)^2 \end{aligned}$$

puisque les deux membres de $(*)$ sont positifs. Ainsi

$$\begin{aligned} f_2(x) = g_2(x) &\Leftrightarrow 1 = \left(1-x^2\right)(1+x) \\ &\Leftrightarrow x^3+x^2-x = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2+x-1 = 0, \end{aligned}$$

toujours en supposant que x appartient à $]0,1[$. Les racines de l'équation du second degré obtenue étant $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, l'équation $f_2(x) = g_2(x)$ admettra $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ comme unique solution dans $]0,1[$.

I.3.3.2. Les fonctions dérivées f_2' et g_2' sont strictement positives sur $]0,1[$. Par conséquent les fonctions f_2 et g_2, continues sur $[0,1]$, seront strictement croissantes sur $[0,1]$.

I.3.3.3. On trouve

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$f_2(x)$	0	0,01	0,04	0,09	0,16	0,25	0,36	0,49	0,64	0,81	1

Pour g_2, c'est le moment de calculer des valeurs approchées avec sa calculatrice. Un petit programme comme

```
p :=0 :
repeat :
print(float(p/10),float(1-(1-p/10)^(1/2))) : p :=p+1 :
until p=11 end
```

permet à MuPad de sortir des valeurs approchées de $g_2(p/10)$ lorsque p varie de 0 à 10. On trouve :

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$g_2(x)$	0	0,051	0,105	0,163	0,225	0,293	0,367	0,452	0,553	0,684	1

I.3.3.4. Sur la FIG. 5.3, le graphe de f_2 est sous celui de g_2 quand x appartient à $[0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}]$.

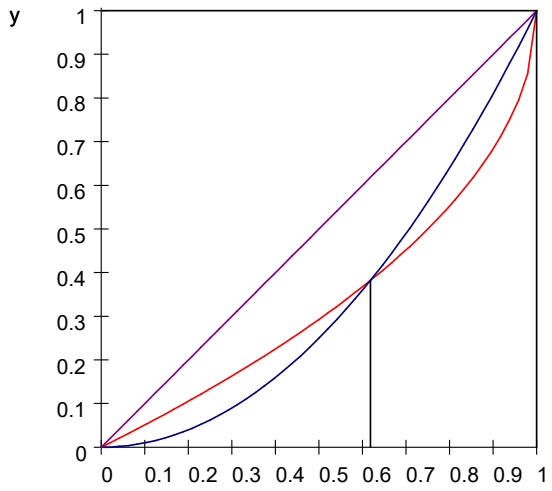


FIG. 5.3 – Graphes de f_2 et g_2

I.3.3.5. Comme les indices de Gini de f_2 et g_2 sont égaux, les aires entre la courbe représentative de f_2 et la première bissectrice d'une part, et entre la courbe représentative de g_2 et la première bissectrice d'autre part, sont égales.

I.3.3.6. Les deux pays ont même indice de Gini alors que les distributions des richesses diffèrent énormément. Dans l'un des pays, 20% de la population la plus pauvre possède $10,5\%$ des richesses (celui où la fonction de concentration est g_2) tandis que, dans l'autre pays, 20% de la population la plus pauvre possède seulement 4% des richesses. Sur ces exemples, l'indice de Gini n'est pas signifiant puisque ne rend pas compte de cette disparité.
Mais attention : l'indice de Gini rend toujours compte de "l'écart global" de la courbe de concentration à la courbe de répartition des richesses totalement égalitaire $y = x$, et permet tout de même de classer les pays suivant ce critère. Comme tout indicateur, l'indice de Gini a des faiblesses et ne rend pas compte de toute la situation.

II.1. On a

$$\widetilde{f}(x) \leq x \;\Leftrightarrow\; x - f(x) \leq x \;\Leftrightarrow\; f(x) \geq 0.$$

Par hypothèse, f est dérivable sur $[0,1[$ et $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0,1[$. La fonction f est donc croissante sur $[0,1[$, et comme $f(0) = 0$, on peut affirmer que $f(x)$ est positif pour tout $x \in [0,1[$. On a aussi $f(1) = 1 \geq 0$, de sorte que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0,1]$, et que les équivalences précédentes montrent que $\widetilde{f}(x) \leq x$ pour tout $x \in [0,1]$.

II.2.1. Pour tout $x \in [0,1[$, $\widetilde{f}'(x) = 1 - f'(x)$ et $\widetilde{f}''(x) = -f''(x) \leq 0$, de sorte que $\widetilde{f}'$ soit décroissante sur $[0,1[$.

II.2.2. • Si $\widetilde{f}'(x) < 0$ pour tout $x \in]0,1[$, alors

$$\forall x \in]0,1[\quad f'(x) > 1. \quad (\natural)$$

Le Théorème de Rolle, appliqué à f continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$, montre cependant l'existence d'un réel $c \in]0,1[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1, \quad (\flat)$$

en contradiction avec $(*)$.

• On raisonne de la même manière si $\widetilde{f}'(x) > 0$ pour tout $x \in]0,1[$. Dans ce cas $f'(x) < 1$ pour tout $x \in]0,1[$, en contradiction avec $(\flat)$.

II.2.3. La question précédente montre qu'il existe deux réels a et b dans $]0,1[$ tels que $\widetilde{f}'(a) \geq 0$ et $\widetilde{f}'(b) \leq 0$. Puisque $\widetilde{f}' = 1 - f'$ est continue sur $]0,1[$ (en effet, f est deux fois dérivable sur $[0,1[$ donc f' et $1 - f'$ sont continues sur $[0,1[$), on peut appliquer le Théorème des valeurs intermédiaires : il existe un réel x_0 situé entre a et b, tel que $\widetilde{f}'(x_0) = 0$.

II.3. • L'un des sens est évident : si $\widetilde{f}$ est identiquement nulle, sa dérivée $\widetilde{f}'(0)$ en 0 vaut 0 puisque

$$\lim_{x\to 0}\frac{\widetilde{f}(x)-\widetilde{f}(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\widetilde{f}(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0.$$

• Réciproquement, si $\widetilde{f}'(0)=0$, la décroissance de $\widetilde{f}'$ sur $[0,1[$ (II.2.1) permet d'écrire

$$\forall x\in[0,1[\quad \widetilde{f}'(x)\leq\widetilde{f}'(0)=0$$

de sorte que $\widetilde{f}$ soit elle-même décroissante sur $[0,1[$. Comme $\widetilde{f}$ est continue sur $[0,1]$, cela entraîne la décroissance de $\widetilde{f}$ sur $[0,1]$, et l'on en tire

$$\forall x\in[0,1]\quad 0=\widetilde{f}(0)\geq\widetilde{f}(x)\geq\widetilde{f}(1)=0,$$

soit $\widetilde{f}(x)=0$ pour tout $x\in[0,1]$. L'application $\widetilde{f}$ est bien nulle sur $[0,1]$.

• Dire que $\widetilde{f}$ est nulle sur $[0,1]$ revient à dire que $f(x)=x$ pour tout x appartenant à $[0,1]$. Le graphe de la fonction f est alors inclus dans la première bissectrice.

Remarque : Donnons une autre preuve de l'implication

$$\widetilde{f}'(0)=0\ \Rightarrow\ \widetilde{f}\text{ nulle sur }[0,1].$$

Pour cela, on utilise une caractérisation des fonctions convexes vue en cours (voir par exemple [1], remarque a) suivant le Théorème 2.4.1) :

> **Théorème** Γ : Une fonction $f:I\to\mathbb{R}$ définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et deux fois dérivable sur l'intérieur $\overset{o}{I}$ de I, est convexe si et seulement si f'' est positive sur $\overset{o}{I}$.

Les hypothèses faites sur la fonction f de notre problème en font une fonction convexe sur $[0,1]$, de sorte que l'on puisse affirmer (toujours le cours...) que le graphe $\mathcal{G}_f$ de f est toujours situé sous ses sécantes et sur ses tangentes.
Le tour est joué : si $\widetilde{f}'(0)=0$, alors $f'(0)=1$ et $\mathcal{G}_f$ est au-dessus du graphe de sa tangente en 0, tangente qui n'est autre que la première bissectrice d'équation $y=x$. Mais $\mathcal{G}_f$ est sous la sécante passant par les points de coordonnées $(0,f(0))$ et $(1,f(1))$. Comme $f(0)=0$ et $f(1)=1$, cette sécante est encore la première bissectrice, et l'on en déduit

$$\forall x\in[0,1]\quad x\leq f(x)\leq x,$$

c'est-à-dire $f(x)=x$ pour tout $x\in[0,1]$, et $\widetilde{f}$ est bien nulle sur $[0,1]$.

Je pense qu'une telle démonstration, qui montre au correcteur que l'on connaît des résultats précis sur les fonctions convexes (et que l'on a repéré une fonction convexe... ce qui n'est déjà pas si mal), donne au candidat la totalité des points réservés à la question.

II.4.1. D'après la question précédente, l'hypothèse $\widetilde{f}'(0) \neq 0$ entraîne la non nullité de $\widetilde{f}$ sur $[0,1]$. Comme $\widetilde{f}'$ est décroissante sur $[0,1[$ (II.2.1) et s'annule en x_0 (II.2.3), on a $\widetilde{f}' \geq 0$ sur $[0,x_0]$ et $\widetilde{f}' \leq 0$ sur $[x_0,1[$. Par suite $\widetilde{f}$ est croissante sur $[0,x_0]$, et décroissante sur $[x_0,1[$, mais aussi sur $[x_0,1]$ puisque $\widetilde{f}$ est continue sur $[x_0,1]$ (voir remarque de l'énoncé précédant la partie I). On en déduit le tableau de variations :

x	0		x_0		1
$\widetilde{f}'$		$\overset{+}{\searrow}$	0	$\overset{-}{\searrow}$	
$\widetilde{f}$	0	$\nearrow$	$\widetilde{f}(x_0)$	$\searrow$	0

II.4.2. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe $x_1 \in]0,1[$ tel que $\widetilde{f}(x_1) = 0$. De deux choses l'une :

► Si $x_1 \leq x_0$, la croissance de $\widetilde{f}$ sur $[0,x_0]$ montre que

$$\forall x \in [0,x_1] \quad 0 = \widetilde{f}(0) \leq \widetilde{f}(x) \leq \widetilde{f}(x_1) = 0,$$

et $\widetilde{f}$ est nulle sur $[0,x_1]$. Dans ce cas $\widetilde{f}'(0) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse de cette question.

► Si $x_0 < x_1$, la décroissance de $\widetilde{f}$ sur $[x_0,1]$ donne

$$\forall x \in [x_1,1] \quad 0 = \widetilde{f}(x_1) \geq \widetilde{f}(x) \geq \widetilde{f}(1) = 0,$$

de sorte que $\widetilde{f}$ soit nulle sur $[x_1,1]$. Alors $\widetilde{f}'$ est identiquement nulle sur $[x_1,1[$, et

$$\left.\begin{array}{l} \widetilde{f}'(x_0) = 0 \\ \widetilde{f}' \text{ décroissante sur } [0,1[\text{ (II.2.1)} \\ \widetilde{f}' \text{ nulle sur } [x_1,1[\end{array}\right\} \Rightarrow \widetilde{f}' \text{ nulle sur } [x_0,1[.$$

Mais alors $\widetilde{f}$ est constante sur $[x_0,1[$, donc aussi constante sur $[x_0,1]$ (par continuité). Comme $\widetilde{f}(1) = 0$, cette constante est nulle et l'on peut affirmer que $\widetilde{f}$ est nulle sur $[x_0,1]$. En particulier $\widetilde{f}(x_0) = 0$, et le tableau de variations de $\widetilde{f}$ montre que $\widetilde{f}$ est nulle sur tout $[0,1]$. D'où $\widetilde{f}'(0) = 0$, ce qui est absurde.

II.4.3. Le tableau de variations de $\widetilde{f}$ dessiné en II.4.1 et la question II.2.3 montrent que $\widetilde{f}$ admet sur $[0,1]$ un maximum atteint en $x_0 \in]0,1[$. La question II.4.2 nous assure que ce maximum $\widetilde{f}(x_0)$ est strictement positif.

III.1. Les variations de $\widetilde{f}$ données en II.4.1 montrent que $\widetilde{f} \geq 0$ sur $[0,1]$, donc $I(f) = 2\int_0^1 \widetilde{f}(x)\,dx \geq 0$.

III.2. D'après II.1, $\widetilde{f}(x) \leq x$ pour tout $x \in [0,1]$. Par suite

$$I(f) = 2\int_0^1 \widetilde{f}(x)\,dx \leq 2\int_0^1 x\,dx = 1.$$

III.3.1. La fonction f est croissante sur $[0,1[$ (puisque de dérivée f' positive sur $[0,1[$) et vérifie $f(0) = 0$, donc est positive sur $[0,1[$. Comme $f(1) = 1$, on peut même affirmer que f est positive sur $[0,1]$. On en déduit $\int_0^\alpha f(x)\,dx \geq 0$, puis

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^1 f(x)\,dx \\ &\geq \int_\alpha^1 f(x)\,dx \geq \int_\alpha^1 f(\alpha)\,dx = f(\alpha)(1-\alpha).\end{aligned}$$

III.3.2. f est continue sur $[0,1]$ et vérifie $f(1) = 1$, donc

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad x \in [0,1] \text{ et } |x-1| \leq \eta \;\Rightarrow\; |f(x)-1| \leq \varepsilon.$$

Il suffit de choisir $\varepsilon = 1/2$ pour avoir

$$\exists \eta > 0 \quad 1-\eta \leq x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq f(x).$$

N'importe quel réel α_0 compris strictement entre $1-\eta$ et 1 vérifie $f(\alpha_0) \geq 1/2$.

III.3.3. On applique III.3.1 avec $\alpha = \alpha_0$:

$$\begin{aligned}I(f) &= 2\int_0^1 (x - f(x))\,dx \\ &= 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - 2\int_0^1 f(x)\,dx \\ &\leq 1 - 2f(\alpha_0)(1-\alpha_0) \leq 1 - (1-\alpha_0) = \alpha_0 < 1.\end{aligned}$$

III.4. La question I.2.3 donne $\lim I(f_n) = 1$, donc

$$\begin{aligned}\forall A < 1 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad n \geq N &\Rightarrow |I(f_n) - 1| < 1 - A \\ &\Rightarrow A < I(f_n) < 2 - A.\end{aligned}$$

On a bien $I(f_n) > A$ dès que n est suffisamment grand.

III.5.1. $\varphi(0) = \widetilde{f}(0) = 0$ et $\varphi(x_0) = \widetilde{f}(x_0) - M = 0$.

III.5.2. L'application φ est dérivable sur $[0, x_0]$ et $\varphi'(x) = \widetilde{f}'(x) - M/x_0$. Ainsi

$$\varphi'(x_0) = -\frac{M}{x_0} = -\frac{\widetilde{f}(x_0)}{x_0} < 0$$

si l'on rappelle que $\widetilde{f}(x_0)$ est strictement positif (d'après II.4.2). Par ailleurs, le Théorème de Rolle appliqué à la fonction φ (dérivable sur $[0, x_0]$ et telle que $\varphi(0) = \varphi(x_0) = 0$) montre que φ s'annule sur l'intervalle $[0, x_0]$.

III.5.3. ▶ **Première solution** : On étudie les variations de φ. Les propriétés

$$\begin{cases} \varphi(0) = \varphi(x_0) = 0 \\ \varphi'(x_0) < 0 \\ \exists c \in [0, x_0] \quad \varphi'(c) = 0 \\ \varphi'' = -f'' \leq 0, \text{ donc } \varphi' \text{ est décroissante sur } [0, x_0], \end{cases}$$

nous permettent de construire le tableau de variations de φ :

x	0		c		x_0
φ'		$\overset{+}{\searrow}$	0	$\overset{-}{\searrow}$	$\varphi'(x_0) < 0$
φ	0	$\nearrow$	$\varphi(c)$	$\searrow$	0

Ce tableau montre que φ admet un maximum sur $[0, x_0]$ en c, et que

$$\forall x \in [0, x_0] \quad \varphi(x) \geq 0.$$

Cela s'écrit

$$\forall x \in [0, x_0] \quad \widetilde{f}(x) \geq M\frac{x}{x_0}. \quad (*)$$

▶ **Seconde solution** : On utilise la concavité de φ. La fonction φ est continue sur $[0, 1]$, deux fois dérivable sur $[0, 1[$ et telle que

$$\forall x \in [0, 1[\quad \varphi''(x) = \widetilde{f}''(x) = -f''(x) \leq 0,$$

c'est donc une fonction concave sur $[0, 1]$ (on applique encore le Théorème Γ). La tangente en x_0 au graphe de φ est donc au-dessus de la courbe représentative de φ. Cela donne :

$$\forall x \in [0, x_0] \quad \varphi(x) \leq \varphi'(x_0)(x - x_0) + \varphi(x_0).$$

Comme $\varphi'(x_0) = \widetilde{f}'(x_0) - M/x_0 = -M/x_0 < 0$, $x - x_0 \leq 0$ sur $[0, x_0]$ et $\varphi(x_0) = 0$, on obtient

$$\forall x \in [0, x_0] \quad \varphi(x) \geq 0$$

c'est-à-dire $(*)$.

III.5.4. On applique III.5.3 :

$$\begin{aligned} I(f) &= 2\int_0^1 \widetilde{f}(x)\,dx \\ &= 2\int_0^{x_0} \widetilde{f}(x)\,dx + 2\int_{x_0}^1 \widetilde{f}(x)\,dx \\ &\geq 2\int_0^{x_0} M\frac{x}{x_0}\,dx + 2\int_{x_0}^1 M\frac{x-1}{x_0-1}\,dx \end{aligned}$$

donc

$$I(f) \geq Mx_0 + 2\frac{M}{x_0-1}\left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{x_0}^1 = M.$$

III.6.1. D'après II.4.2, $\widetilde{f}(x) > 0$ pour tout $x \in]0,1[$, donc

$$H(x) = \int_0^x \widetilde{f}(t)\,dt \geq 0.$$

III.6.2. La positivité de $\widetilde{f}$ sur $[0,1]$ (prouvée en II.4.2) nous permet d'écrire

$$H(x_2) - H(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \widetilde{f}(t)\,dt \geq 0$$

pour tous x_1, x_2 tels que $x_1 \leq x_2$, de sorte que H soit croissante sur $[0,1]$.

Autre solution : $\widetilde{f}$ est continue sur $[0,1]$ donc $H(x)$ est dérivable sur $[0,1]$, de fonction dérivée $H'(x) = \widetilde{f}(x)$ (ce résultat fondamental est à connaître ainsi que sa preuve qui peut être demandée à n'importe quel moment à l'oral du concours : le point sur ce qu'il faut savoir est fait à la Section 13.3.4 de [3]). Toujours d'après II.4.2, $H'(x) = \widetilde{f}(x) > 0$ pour tout $x \in]0,1[$, donc H est strictement croissante sur $]0,1[$, et aussi sur $[0,1]$ par continuité.

III.6.3. Par définition, $I(f) = 2H(1)$, donc

$$I(f) = 0 \;\Leftrightarrow\; H(1) = 0.$$

Si $I(f) = 0$, la croissance de H, démontrée à la question précédente, donne

$$\forall x \in [0,1] \quad H(0) = 0 \leq H(x) \leq H(1) = 0,$$

et H est la fonction nulle.

III.6.4. Si $I(f) = 0$, alors la fonction H est nulle sur $[0,1]$ (question précédente). Comme H est dérivable sur $[0,1]$ et de dérivée $\widetilde{f}$, on en déduit que $\widetilde{f}$ est nulle sur $[0,1]$, et cela équivaut à $f(x) = x$ pour tout $x \in [0,1]$.

Autre solution : Comme $\widetilde{f}$ est continue et positive sur $[0,1]$ et comme $I(f) = 2\int_0^1 \widetilde{f}(t)\,dt = 0$, un résultat classique d'analyse (le Théorème rappelé ci-dessous qu'il faut bien connaître ainsi que sa preuve) permet de conclure à la nullité de $\widetilde{f}$.

Le résultat de cours utilisé ici est à connaître ainsi que sa preuve, car il peut être demandé à l'oral du concours. Les voici :

Théorème : Si f est une application continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, alors $\int_a^b f(t)\,dt = 0$ si et seulement si f est la fonction nulle.

Preuve : La condition est clairement suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire. Si $\int_a^b f(t)\,dt = 0$, raisonnons par l'absurde et supposons l'existence d'un réel t_0 tel que $f(t_0) \neq 0$. Supposons par exemple que $f(t_0) > 0$ (l'autre cas se traitant de la même manière). Par hypothèse

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad |t - t_0| \leq \eta &\Rightarrow |f(t) - f(t_0)| \leq \varepsilon \\ &\Rightarrow f(t_0) - \varepsilon \leq f(t) \leq f(t_0) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Il suffit de choisir ε tel que $f(t_0) - \varepsilon$ soit strictement positif, par exemple $\varepsilon = f(t_0)/2$, pour que $f(t)$ reste strictement positif au voisinage de t_0. De façon plus précise, $0 < f(t_0)/2 \leq f(t)$ pour tout $t \in]t_0 - \eta, t_0 + \eta[$. Ainsi (en supposant t_0 différent de a et b, et η choisi de façon à avoir $]t_0-\eta, t_0+\eta[\subset [a,b]$, les cas où t_0 vaut a ou b se traitant de façon analogue moyennant quelques transformations mineures) :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^{t_0-\eta} f(t)\,dt + \int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} f(t)\,dt + \int_{t_0+\eta}^b f(t)\,dt.$$

Puisque f est positive, on obtient

$$2\eta \times \frac{f(t_0)}{2} \leq \int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} f(t)\,dt \leq \int_a^b f(t)\,dt,$$

autrement dit $0 < \eta f(t_0) \leq \int_a^b f(t)\,dt$, en contradiction avec la nullité de $\int_a^b f(t)\,dt$. ■

Problème 2

I.1. On a une chance sur deux d'obtenir 1 au premier lancer et ainsi d'atteindre la case 1 au premier lancer. Donc $p(A_1) = 1/2$. De la même façon, $p(A_2) = 1/2$. Par contre $p(A_3) = 0$ car il est impossible d'atteindre la troisième case au 1er lancer en ne faisant que des 1 ou des 2 aux dés.

On obtient ensuite le tableau

i	1	2	3	4	5
$p(B_i)$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0

Justifions les trois premières colonnes du tableau.

- Au second lancer, on a forcément dépassé la case 1 (puisqu'on obtient toujours au moins un 1 à chaque lancer). La probabilité $p(B_1)$ est donc nulle.

- On atteint la case 2 au second lancer si et seulement si l'on on a obtenu deux fois un 1 aux dés, donc avec une probabilité $1/2 \times 1/2 = 1/4$. Par conséquent $p(B_1) = 1/4$.

- On atteint la case 3 seulement de deux façons :

$\triangleright$ en obtenant la case 1 au premier lancer, puis la case 3 au second : probabilité $1/2 \times 1/2 = 1/4$,

$\triangleright$ en obtenant la case 2 au premier lancer, puis la case 3 au second : probabilité $1/2 \times 1/2 = 1/4$,

soit au total

$$p(B_3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

I.2.1. Puisque notre dé ne peut donner que des 1 ou des 2, la case 2 est dépassée au premier lancer si et seulement si on obtient 2 au premier lancer. Donc $\{X_2 = 1\} = A_2$ et $p(\{X_2 = 1\}) = 1/2$.
La case 2 est dépassée au second lancer si et seulement si l'on obtient 1 au premier lancer de dé, puis n'importe quel nombre au second lancer. Donc $\{X_2 = 2\} = A_1$ et $p(\{X_2 = 2\}) = 1/2$.

I.2.2. Dans le pire des cas, on dépasse la case 2 au second lancer, donc $\{X_2 = i\} = \varnothing$ si $i \geq 3$. La variable aléatoire X_2 prend ses valeurs dans $\{1, 2\}$.

I.2.3. On a déjà obtenu $p(\{X_2 = 1\}) = 1/2$ et $p(\{X_2 = 2\}) = 1/2$ en I.2.1.

I.3.1. $\{X_3 = 2\} = \{(1,2), (2,1), (2,2)\}$.

I.3.2. $\{X_3 = 3\} = \{(1,1,1), (1,1,2)\}$.

I.3.3. En un lancer, on arrive sur les cases n°1 ou 2, mais l'on ne dépasse jamais la case 3. On n'aura donc jamais $X_3 = 1$. On peut par contre avoir $X_3 = 2$ (comme on l'a vu en I.3.1). Ainsi $m_3 = 2$.

I.3.4. Dans le pire des cas, la case 3 est dépassée après n'avoir obtenu que des 1 au dé, soit au bout de 3 lancers. Au quatrième lancer, la case 3 a déjà été dépassée... donc X_3 ne peut jamais être égal à i (où $i \geq 4$). On obtient $M_4 = 3$.

I.3.5. On trouve

i	1	2	3	4	...
$p(X_3 = i)$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	...

Avec les notations de I.3.1 et I.3.2, on obtient en effet :

$$\begin{aligned} p(X_3 = 2) &= p(1,2) + p(2,1) + p(2,2) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} p(X_3 = 3) &= p(1,1,1) + p(1,1,2) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Remarque : On vérifie que $p(X_3 = 2) + p(X_3 = 3) = 1$.

I.4.1. La case 4 est dépassée pour la première fois au i-ième lancer si et seulement si $i \in \{2, 3, 4\}$, donc X_4 prend ses valeurs dans $\{2, 3, 4\}$.

I.4.2. $\{X_4 = 3\} = \{(1,1,2), (1,2,1), (1,2,2), (2,1,1), (2,1,2)\}$. En fait, tous les triplets (x_1, x_2, x_3) de $\{1,2\}^3$ conviennent à partir du moment où $x_1 + x_2 < 4$ et $x_1 + x_2 + x_3 \geq 4$.

I.4.3. La question précédente donne $p(X_4 = 3) = 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{8}$. Comme

$$\begin{cases} \{X_4 = 2\} = \{(2,2)\} \\ \{X_4 = 4\} = \{(1,1,1,1), (1,1,1,2)\} \end{cases}$$

on obtient $p(X_4 = 2) = 1/4$ et $p(X_4 = 4) = 2 \times (\frac{1}{2})^4 = 1/8$. En conclusion :

i	1	2	3	4	5
$p(X_3 = i)$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	0

Remarque : On a encore $\sum_{i=2}^{4} p(X_3 = i) = 1$, donc ces résultats sont acceptables.

I.5.1.1. Il y en a autant que de parties à q éléments dans un ensemble à p éléments, soit

$$\binom{p}{q} = \frac{p!}{q!\,(p-q)!}.$$

I.5.1.2. Si q entiers x_i $(1 \leq q \leq p))$ sont égaux à 2, alors $x_1+x_2+...+x_p = n$ donne $2q + (p-q) = n$, d'où $q = n-p$.

I.5.1.3. Un p-uplet $(x_1, ..., x_p)$ tel que $x_1 + x_2 + ... + x_p = n$ contient exactement $q = n-p$ nombres 2 placés en des endroits différents, et il y a exactement $\binom{p}{q}$ façons de placer ces q nombres 2. On dénombre donc

$$\binom{p}{n-p} = \frac{p!}{(n-p)!n!}$$

p-uplet $(x_1, ..., x_p)$ tel que $x_1 + x_2 + ... + x_p = n$.

I.5.2. • On dépasse la case n en un nombre minimal de lancers de dés si l'on ne fait que des 2. Jeter i fois les dés revient alors à avancer jusqu'à la case $2i$, et dépasser n revient à avoir $2i \geq n$, autrement dit $i \geq n/2$.

• Si l'on effectue n lancers de dés et si l'on obtient 1 à chaque lancer, on dépasse la case n pour la première fois avec ces n lancers, donc $\{X_n = n\}$ n'est pas vide.
Si $i > n$, $\{X_n = i\} = \varnothing$ puisque l'on est certain d'avoir dépassé la case n à la fin des n premiers lancers, et donc bien avant le i-ième lancer.

• En conclusion, X_n prend ses valeurs dans $[n/2, n]$.

I.5.3.1. L'événement $\{X_n = p\}$ est la réunion disjointes des événements A et B suivants :

$A =$ "J'atteins la case n en exactement p lancers."

$B =$ "J'atteins la case $n+1$ en exactement p lancers sans avoir obtenu la case n au cours des $p-1$ premiers lancers (si bien que mon dernier lancer doit être un 2, c'est-à-dire $x_p = 2$)."

Cela s'écrit
$\{X_n = p\} = A \bigsqcup B$
$= (x_1 + x_2 + ... + x_p = n)$ ou $(x_1 + x_2 + ... + x_{p-1} = n-1$ et $x_p = 2)$.

I.5.3.2. On a $p(X_n = p) = p_1 + p_2$ où :

$$\begin{aligned} p_1 &= p(x_1 + x_2 + ... + x_p = n) \\ &= \begin{pmatrix} \text{probabilité d'obtenir} \\ \text{un } p\text{-uplet particulier} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{nombre de } p\text{-uplets tels que} \\ x_1 + x_2 + ... + x_p = n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2^p}\binom{p}{n-p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2 &= p\left(x_1 + x_2 + ... + x_{p-1} = n-1 \text{ et } x_p = 2\right) \\ &= \left(\begin{array}{c}\text{probabilité d'obtenir} \\ \text{un } p\text{-uplet particulier}\end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c}\text{nombre de } p\text{-uplets tels que} \\ x_1 + x_2 + ... + x_{p-1} = n-1 \text{ et } x_p = 2\end{array}\right) \\ &= \frac{1}{2^p}\binom{p-1}{(n-1)-(p-1)} = \frac{1}{2^p}\binom{p-1}{n-p}. \end{aligned}$$

En conclusion

$$p\left(X_n = p\right) = \frac{1}{2^p}\left[\binom{p}{n-p} + \binom{p-1}{n-p}\right].$$

II.1. La probabilité d'obtenir k est $1/3$.

II.2. On dépasse la case 4 en un nombre maximum de lancers si l'on sort à chaque fois un 1 au dés, donc en 4 coups. Un cinquième lancer ne pourra se faire que lorsque la case 4 aura déjà été dépassée, donc

$$\forall i \geq 5 \quad \{Y_4 = i\} = \varnothing.$$

A l'inverse, on ne peut pas dépasser la case 4 un un seul lancer (celui-ci ne peut nous faire arriver que sur l'une des cases 1, 2 ou 3, mais jamais plus loin !). Donc $\{Y_4 = 1\} = \varnothing$. En conclusion, Y_4 prend ses valeurs dans $\{2, 3, 4\}$.

II.3. On obtient $\{Y_4 = 2\} = \{(1,3), (3,1), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$.

II.4. On obtient $\{Y_4 = 4\} = \{(1,1,1,1), (1,1,1,2), (1,1,1,3)\}$ puisque le quadruplet (y_1, y_2, y_3, y_4) appartient à $\{Y_4 = 4\}$ si et seulement si l'on a simultanément $y_1 + y_2 + y_3 \leq 3$ et $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \geq 4$.

II.5. On utilise II.3 et II.4 pour obtenir

$$\begin{cases} p\left(\{Y_4 = 2\}\right) = 6 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{2}{3} = \dfrac{18}{27} \\ p\left(\{Y_4 = 4\}\right) = 3 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^4 = \dfrac{1}{27}, \end{cases}$$

d'où

$$p\left(\{Y_4 = 3\}\right) = 1 - \left(p\left(\{Y_4 = 2\}\right) + p\left(\{Y_4 = 4\}\right)\right) = 1 - \frac{18}{27} - \frac{1}{27} = \frac{8}{27}.$$

Remarque : Il est facile de vérifier le dernier résultat en explicitant l'ensemble $\{Y_4 = 3\}$. On trouve

$$\begin{aligned} \{Y_4 = 3\} = \{&(1,1,2), (1,1,3), (1,2,1), (1,2,2), (1,2,3), \\ &(2,1,1), (2,1,2), (2,1,3)\}, \end{aligned}$$

d'où $p\left(\{Y_4 = 3\}\right) = 8 \times (\frac{1}{3})^3 = 8/27$, comme prévu.

II.6. L'espérance de Y_4 est

$$E\left(Y_4\right) = \sum_{i=2}^{4} i\, p\left(\{Y_4 = i\}\right) = 2\frac{18}{27} + 3\frac{8}{27} + 4\frac{1}{27} = \frac{64}{27}.$$

On rappelle que la variance $V\left(Y_4\right)$ de Y_4 est, par définition, l'espérance du carré de la variable aléatoire centrée, ce que l'on écrit $V\left(Y_4\right) = E((Y_4 - E\left(Y_4\right))^2)$. Et l'on connaît la formule $V\left(Y_4\right) = E(Y_4^2) - E(Y_4)^2$. Ici

$$E(Y_4^2) = 2^2\left(\frac{18}{27}\right) + 3^2\left(\frac{8}{27}\right) + 4^2\left(\frac{1}{27}\right) = \frac{160}{27}$$

donc

$$V\left(Y_4\right) = \frac{160}{27} - \left(\frac{64}{27}\right)^2 = \frac{224}{729}.$$

Remarque : Si $m = E(X) = \overline{X} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ désigne l'espérance d'une variable aléatoire X, on a bien $V\left(X\right) = E\left(\left(X - m\right)^2\right) = E(X^2) - E(X)^2$. La démonstration est simple, et c'est pourquoi nous nous raffraichissons l'esprit en la ré-écrivant[1]. Avec des notations standards,

$$\begin{aligned} V\left(X\right) &= E\left(\left(X - m\right)^2\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - m\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - 2m \sum_{i=1}^{n} p_i x_i + m^2 \sum_{i=1}^{n} p_i \\ &= E(X^2) - 2m^2 + m^2 = E(X^2) - m^2. \end{aligned}$$

III.1. • Z_1 ne peut prendre que les valeurs 1, 2 ou 3, avec à chaque fois la probabilité 1/3.

• Z_2 prend les valeurs 2, 3, 4, 5, 6. Avec des notations évidentes et en posant $\nu = 1/3$, on trouve

[1] L'un des objectifs d'une préparation au concours est de savoir retrouver aisément toutes les démonstrations classiques de résultats de cours qui sont "à portée", et il ne faut jamais perdre une occasion de réviser ces résultats. Bien entendu, le lecteur qui connaît parfaitement ce calcul peut le sauter...

i	$\{Z_2 = i\}$	$p(\{Z_2 = i\})$
2	$(1,1)$	ν^2
3	$(1,2),(2,1)$	$2\nu^2$
4	$(2,2),(1,3),(3,1)$	$3\nu^2$
5	$(2,3),(3,2)$	$2\nu^2$
6	$(3,3)$	ν^2

On vérifie que la somme de toutes ces probabilités donne 1.

• Z_3 prend les valeurs 3 à 9 incluses. En posant toujours $\nu = 1/3$, on obtient (en complétant les lignes correspondant à $i = 7$, 8, 9 par symétrie) :

i	$\{Z_3 = i\}$	$p(\{Z_3 = i\})$
3	$(1,1,1)$	ν^2
4	$(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1)$	$3\nu^2$
5	$(1,2,2),(2,1,2),(2,2,1)$ $(1,1,3),(1,3,1),(3,1,1)$	$6\nu^2$
6	$(2,2,2)$, puis $(1,2,3)$ et $3! = 6$ autres triplets du même type	$7\nu^2$
7	...	$6\nu^2$
8	...	$3\nu^2$
9	...	ν^2

III.2. Z_n prend ses valeurs entre n et $3n$.

III.3. $\{Z_n - Z_{n-1} = k\}$ = "le n-ième lancer de dé donne k". On remarque : $p(\{Z_n - Z_{n-1} = k\}) = 1/3$.

III.4. On a

$$p(\{Z_{n-1} = j-1\}) \neq 0 \Leftrightarrow n-1 \leq j-1 \leq 3(n-1) \Leftrightarrow n \leq j \leq 3n-2$$
$$p(\{Z_{n-1} = j-2\}) \neq 0 \Leftrightarrow n-1 \leq j-2 \leq 3(n-1) \Leftrightarrow n+1 \leq j \leq 3n-1$$
$$p(\{Z_{n-1} = j-3\}) \neq 0 \Leftrightarrow n-1 \leq j-3 \leq 3(n-1) \Leftrightarrow n+2 \leq j \leq 3n.$$

III.5. L'événement $\{Z_n = j\}$ a lieu quand on atteint la case j au n-ième lancer, et cela ne peut se faire que de trois façons différentes :

▷ En obtenant 1 au dernier lancer de dé, donc en ayant atteint la $(j-1)$-ième case au $(n-1)$-ième lancer.

▷ En obtenant 2 au dernier lancer de dé, donc en ayant atteint la $(j-2)$-ième case au $(n-1)$-ième lancer.

▷ En obtenant 3 au dernier lancer de dé, donc en ayant atteint la $(j-3)$-ième case au $(n-1)$-ième lancer.

L'événement $\{Z_n = j\}$ apparaît donc comme la réunion disjointe des parties $E_{n,j}^k = \{Z_{n-1} = j-k\} \cap \{Z_n - Z_{n-1} = k\}$ où $1 \leq k \leq 3$, soit

$$\{Z_n = j\} = \bigcup_{k=1}^{3} \{Z_{n-1} = j-k\} \cap \{Z_n - Z_{n-1} = k\}. \quad (\dagger)$$

Si $n+2 \leq j \leq 3n-2$, la question III.4 montre qu'aucune des trois parties $E_{n,j}^k$ n'est vide, et dans ce cas $\{E_{n,j}^k\}_{1\leq k\leq 3}$ constitue bien une partition de $\{Z_n = j\}$. Si $n \leq j \leq 3n$, certaines des parties $E_{n,j}^k$ $(1 \leq k \leq 3)$ peuvent être vides, on n'a plus nécessairement une partition de $\{Z_n = j\}$ (à strictement parler), mais l'égalité (†) reste vraie.

III.6. La relation (†) et l'axiome des probabilités totales permet d'écrire $p(Z_n = j) = \sum_{k=1}^{3} p(E_{n,j}^k)$. Comme

$$\begin{aligned} p(E_{n,j}^k) &= p(\{Z_n - Z_{n-1} = k\} / \{Z_{n-1} = j-k\}) \times p(Z_{n-1} = j-k) \\ &= \frac{1}{3} p(Z_{n-1} = j-k), \end{aligned}$$

on obtient

$$p(Z_n = j) = \frac{1}{3} p(Z_{n-1} = j-1) + \frac{1}{3} p(Z_{n-1} = j-2) + \frac{1}{3} p(Z_{n-1} = j-3).$$

III.7. La question III.1 nous fournit déjà les trois premières lignes de la matrice $A = (a_{ij})$, et la formule du III.6

$$a_{ij} = \frac{1}{3}(a_{i,j-1} + a_{i,j-2} + a_{i,j-3}) \quad (\ddagger)$$

nous permet de calculer la quatrième ligne de coefficients à partir de la troisième, puis la cinquième ligne à partir de la quatrième, et ainsi de suite jusqu'à la dixième ligne. Voici la matrice A telle qu'elle se présente au début des calculs (notons qu'on peut vérifier la relation (‡) sur ces premiers coefficients) :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{3}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{27} & \frac{3}{27} & \frac{6}{27} & \frac{7}{27} & \frac{6}{27} & \frac{3}{27} & \frac{1}{27} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3^4} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Je propose cet algorithme :

Rentrer les coefficients a_{ij} pour $1 \leq i \leq 3$ et $1 \leq j \leq 30$.
Pour i variant de 4 à 10, faire :
Pour j variant de 1 à $i-1$, faire :
$a_{ij} = 0$
j suivant
Pour j variant de $3i+1$ à 30, faire :
$a_{ij} = 0$
j suivant
Pour j variant de i à $3i$, faire :
$a_{ij} = \frac{1}{3}\left(a_{i,j-1} + a_{i,j-2} + a_{i,j-3}\right)$
j suivant
i suivant

Voici le programme correspondant sur Mupad :

```
/* Initialisation */
for j from 1 to 3 do a[1,j] :=1/3 : end_for :
for j from 4 to 30 do a[1,j] :=0 : end_for :
a[2,1] :=0 :a[2,2] :=1/9 :a[2,3] :=2/9 :a[2,4] :=3/9 :a[2,5] :=2/9 :a[2,6] :=1/9 :
for j from 7 to 30 do a[2,j] :=0 : end_for :
a[3,1] :=0 :a[3,2] :=0 :a[3,3] :=1/27 :a[3,4] :=3/27 :a[3,5] :=6/27 :a[3,6] :=7/27 :
a[3,7] :=6/27 :a[3,8] :=3/27 :a[3,9] :=1/27 :
for j from 10 to 30 do a[3,j] :=0 : end_for :
/* Calcul de la i-ième ligne à partir de la (i-1)-ième ligne */
for i from 4 to 10 do
for j from 1 to i-1 do a[i,j] :=0 : end_for :
for j from 3*i+1 to 30 do a[i,j] :=0 : end_for :
for j from i to 3*i do a[i,j] :=(a[i-1,j-1]+a[i-1,j-2]+a[i-1,j-3])/3 : end_for :
end_for :
for i from 1 to 10 do
for j from 1 to 30 do
print (i,j,a[i,j]) ;
end_for :
end_for :
```

Ce programme donne par exemple $a_{10,30} = 1/59049$, ce qui signifie que nous avons exactement une chance sur 59049 de tomber sur la case 10 au trentième lancer.

Chapitre 6

Année 2007

6.1 Énoncé

Problème 1

Le but de ce problème est l'étude de quelques spécificités des fonctions numériques c et s de la variable réelle x définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par :

$$c\,(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad s\,(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Les trois parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie I : Majorations, minorations, encadrements

1. Calculer $c(0)$ et $s(0)$; donner une valeur approchée de $c(1)$ et de $s(1)$ à 10^{-2} près.

2. Démontrer que la fonction c est paire et que la fonction s est impaire.

3.

3.1. Justifier que, pour tout réel x, on a $[c(x)]^2 - [s(x)]^2 = 1$ et $c(x) \geq 1$.

3.2. Vérifier que, pour tout réel x positif, on a : $0 \leq s(x) \leq c(x)$.

4.

4.1. Justifier que les fonctions c et s sont dérivables sur $\mathbb{R}$; déterminer les fonctions dérivées correspondantes.

4.2. Dresser le tableau de variation de chacune des fonctions c et s.

4.3. Tracer les courbes représentatives des fonctions c et s dans un même repère orthonormal du plan d'unité graphique 1 cm.

5.

5.1. Démontrer que, pour tout réel x positif, on a $x \leq s\,(x)$.

5.2. En déduire les inégalités suivantes pour tout réel x positif :

$$1+\frac{x^2}{2}\leq c\left(x\right)\quad\text{et}\quad x+\frac{x^3}{6}\leq s\left(x\right).$$

6.

6.1. Démontrer que, pour tout réel x compris entre 0 et 1, on a :

$$s(x)\leq 2x\quad\text{et}\quad c\left(x\right)\leq 1+x^2.$$

6.2. En déduire les inégalités suivantes pour tout réel x compris entre 0 et 1 :

$$s\left(x\right)\leq x+\frac{x^3}{3}\quad\text{et}\quad c\left(x\right)\leq 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}.$$

6.3. Justifier que, pour tout réel x compris entre 0 et 1, on a :

$$0\leq c\left(x\right)-\left(1+\frac{x^2}{2}\right)\leq\frac{1}{12}.$$

Qu'en est-il pour $s(x)$?

Partie II : Vers une approximation de la fonction c par des fonctions polynômes

1. Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout réel x, on a :

$$c\left(x\right)=1+\int_0^x\left(x-t\right)c\left(t\right)\,dt.$$

En déduire que, pour tout réel x, on a :

$$c\left(x\right)=1+\frac{x^2}{2}+\int_0^x\frac{\left(x-t\right)^3}{3!}c\left(t\right)\,dt.$$

2. Démontrer que, pour tout réel x, la relation suivante est satisfaite pour tout entier n strictement positif :

$$c\left(x\right)=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\int_0^x\frac{\left(x-t\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}c\left(t\right)\,dt.$$

Un nombre réel strictement positif a étant donné, on cherche, dans la suite de cette partie, à montrer que $c\left(a\right)=1+\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a^{2k}}{(2k)!}\right)$.

3. Démontrer que pour tout entier n strictement positif, on a :

$$\int_0^a\frac{\left(a-t\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}c\left(t\right)\,dt\leq\frac{a^{2n+2}}{(2n+2)!}c\left(a\right).$$

4. On note $v_n = \dfrac{a^{2n}}{(2n)!}$ où n est un entier strictement positif.

4.1. Prouver qu'il existe un entier N tel que pour tout entier n supérieur ou égal à N, on a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{1}{2}.$$

4.2. Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à N, on a :

$$v_n \leq \frac{1}{2^{n-N}} v_N.$$

4.3. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

5. On considère la suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

- $u_0 = 1$;
- pour tout entier n strictement positif, $u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{a^{2k}}{(2k)!}$.

Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $c\,(a)$.

Partie III : Les fonctions c et s et l'hyperbole

On admettra que si une fonction continue sur l'intervalle $[1;+\infty[$ est monotone ou strictement monotone sur l'intervalle $]1;+\infty[$, il en est de même sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

Le plan étant muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la courbe $\mathcal{H}$ d'équation $x^2 - y^2 = 1$. On note $\mathcal{H}^+$ l'ensemble des points de $\mathcal{H}$ admettant des coordonnées x et y positives.

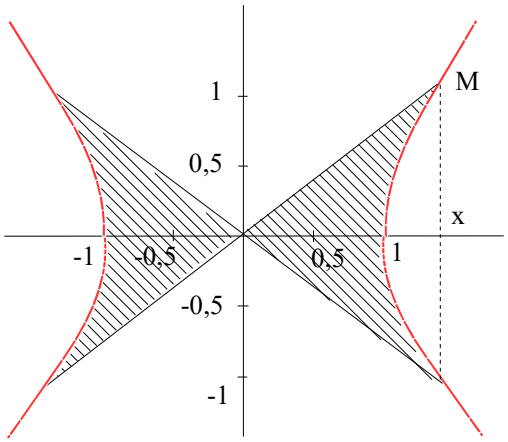
1. Justifier que la courbe $\mathcal{H}^+$ est la courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de la fonction f qui à tout réel x de l'intervalle $[1;+\infty[$ associe $\sqrt{x^2-1}$.

2. Démontrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{H}^+$.

3. Démontrer que la courbe $\mathcal{H}$ peut être obtenue à partir de la courbe $\mathcal{H}^+$ par des symétries que l'on précisera.

4. Tracer la courbe $\mathcal{H}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Un nombre réel positif a étant donné, on cherche, dans la suite de cette partie, à montrer que les coordonnées du point M de $\mathcal{H}^+$ telles que l'aire hachurée représentée ci-dessous soit égale à $2a$ sont $(c(a), s(a))$.



5. On note :

• F la primitive de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2-1}$ définie sur l'intervalle $[1;+\infty[$ et nulle en 1 ;

• $\mathcal{A}$ la fonction qui à tout réel x supérieur ou égal à 1 associe l'aire de la partie hachurée représentée ci-dessus et correspondant au point M d'abscisse x de la courbe $\mathcal{H}^+$;

• g la fonction numérique de variable réelle x définie sur l'intervalle $[1;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} - F(x).$$

5.1. Justifier la relation suivante, pour tout réel x supérieur ou égal à 1 : $\mathcal{A}(x) = 4g(x)$.

5.2. Démontrer que la fonction $\mathcal{A}$ est strictement croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

5.3. Justifier l'inégalité suivante, pour tout réel x strictement supérieur à 1 :

$$g'(x) \geq \frac{1}{2x}.$$

5.4. Déduire de ce qui précède :

• $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$;

• Quel que soit le réel a positif, il existe un unique réel x_a supérieur ou égal à 1 tel que $\mathcal{A}(x_a) = 2a$.

6. Soient $\overrightarrow{I} = \dfrac{\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}}{\sqrt{2}}$ et $\overrightarrow{J} = \dfrac{\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}}{\sqrt{2}}$.

Pour tout point M du plan de coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on note (X, Y) ses coordonnées dans le repère $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$.

6.1. Prouver que $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ est un repère orthonormal du plan.

6.2. Exprimer x et y en fonction de X et Y.

6.3. En déduire que, dans le repère $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$, $\mathcal{H}$ est la courbe représentative de la fonction $h : X \mapsto \dfrac{1}{2X}$, définie sur $\mathbb{R}^*$.

7. On note A le point de coordonnées $(1, 0)$ dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

7.1. Quelles sont les coordonnées du point A dans le repère $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$?

7.2. Tracer la courbe $\mathcal{H}$, le point A, la droite $(O, \overrightarrow{i})$ et représenter la partie hachurée précédente dans le repère $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$.

7.3. Calculer l'aire $\mathcal{A}(c(a))$ en fonction de a.

7.4. Conclure.

Problème 2

Notations

Dans tout le problème, on considère A, B, C trois points non alignés du plan $\mathcal{E}_2$. On adopte les notations suivantes :

- Le cercle circonscrit au triangle ABC a pour centre O et pour rayon R ;
- Le cercle inscrit dans le triangle ABC a pour centre ω et pour rayon r ;
- α, β et γ désignent les longueurs respectives des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$;
- M_A, M_B et M_C désignent les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$;
- H_A, H_B et H_C désignent les pieds des hauteurs respectivement issues de A, B et C ;
- Δ_A, Δ_B, Δ_C désignent les bissectrices intérieures du triangle ABC respectivement issues des sommets A, B, C et A', B', C' désignent les points d'intersection de Δ_A, Δ_B, Δ_C respectivement avec les droites (BC), (AC), (AB).

Pour répondre aux différentes questions, il est vivement conseillé de faire plusieurs schémas qui pourront servir de supports aux divers raisonnements.

Partie I : Caractérisation de l'intérieur d'un triangle

Soit D une droite du plan et A un point n'appartenant pas à la droite D. On note H le pied de la perpendiculaire à la droite D, issue de A, $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur unitaire de la droite D et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{HA}/HA$.

On appelle demi-plan ouvert délimité par la droite D et contenant le point A [resp. ne contenant pas le point A] l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) dans le repère $(H, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ tels que $y > 0$ [resp. $y < 0$].

L'intérieur d'un triangle ABC non aplati est, par définition, l'intersection des trois demi-plans ouverts délimités respectivement par les droites (AB), (BC) et (AC) et contenant respectivement les points C, A et B.

1. Soient B et C deux points distincts appartenant à la droite D. Démontrer qu'un point M du plan appartient au demi-plan ouvert délimité par la droite D et contenant le point A si et seulement si l'ordonnée du point M dans le repère $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ est strictement positive.

2. Démontrer qu'un point M du plan appartient à l'intérieur du triangle ABC si et seulement si M est barycentre des points A, B et C affectés de coefficients non nuls, tous de même signe.

Partie II : Position du centre du cercle inscrit d'un triangle ABC non aplati

1

1.1. Démontrer que, dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, une équation de la bissectrice Δ_A est :

$$y = \frac{\gamma}{\beta}x.$$

1.2. Déterminer, dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, une équation de la droite (BC).

1.3. Déterminer dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, les coordonnées du point A', point d'intersection des droites Δ_A et (BC).

2.

2.1. Déterminer deux réels λ et μ tels que le point A' soit barycentre des points B et C respectivement affectés des coefficients λ et μ.

2.2. Démontrer que le point ω, centre du cercle inscrit dans le triangle ABC, est barycentre des points A, B et C respectivement affectés des coefficients α, β et γ, longueurs respectives des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

2.3. Quel résultat concernant la position du point ω relativement au triangle ABC retrouve-t-on ?

Partie III : Position du centre du cercle circonscrit d'un triangle ABC non aplati

M_A étant le milieu du segment $[BC]$, on munit le plan $\mathcal{E}_2$ du repère orthonormal $(M_A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ tel que le point B (respectivement C) ait pour coordonnées $(-\alpha/2, 0)$ (respectivement $(\alpha/2, 0)$) et que le point A ait une ordonnée strictement positive.
On note (x_A, y_A) les coordonnées du point A dans ce repère.

1. Justifier que les coordonnées du point O, centre du cercle circonscrit au triangle ABC, sont :

$$x_O = 0 \quad \text{et} \quad y_O = \frac{y_A}{2} + \frac{\left(x_A - \frac{\alpha}{2}\right)\left(x_A + \frac{\alpha}{2}\right)}{2y_A}.$$

2. Démontrer que $2y_O y_A = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

3. En déduire que, pour que les points O et A soient dans le même demi-plan ouvert déterminé par la droite (BC), il faut et il suffit que l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ soit aigu.

4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les angles géométriques du triangle ABC pour que le point O soit à l'intérieur du triangle ABC.

Partie IV : Cas particulier d'un résultat établi par Lazare Carnot (général et mathématicien français 1753-1823)

On admettra que si M est un point appartenant à l'intérieur d'un triangle ABC non aplati, l'aire du triangle ABC est égale à la somme des aires des triangles AMB, AMC et BMC.

1. Justifier que l'aire du triangle ABC notée $\mathcal{A}(ABC)$ est telle que :

$$\mathcal{A}(ABC) \;=\; \left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right) r$$

où r désigne le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC.

2. On se place dans le cas où le point O, centre du cercle circonscrit au triangle ABC, appartient à l'intérieur du triangle ABC.

2.1. Démontrer que :

$$\alpha OM_A + \beta OM_B + \gamma OM_C = 2\,\mathcal{A}(ABC). \qquad (1)$$

2.2. Justifier que le point H_A (respectivement H_B, H_C) est un point du segment $[BC]$ (respectivement $[AC]$, $[AB]$).

2.3. Démontrer que les triangles ABH_B, ACH_C et BOM_A sont semblables.

2.4. En déduire l'égalité suivante :

$$(\beta+\gamma)\,OM_A = R\,(AH_B + AH_C)$$

où R est le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

2.5. Ecrire les deux autres égalités qui peuvent être obtenues de manière

analogue pour OM_B et OM_C.

2.6. Démontrer alors l'égalité suivante :

$$OM_A + OM_B + OM_C = R + r. \qquad (2)$$

3. Dans cette question, le point O appartient à l'un des segments $[BC]$, $[AB]$ ou $[AC]$.

3.1. Préciser la nature du triangle ABC dans ce cas.

3.2. On suppose que le point O est un point du segment $[BC]$.

3.2.1. Démontrer qu'on a alors :

$$R + r = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \quad \text{et} \quad R + r = \frac{\beta + \gamma}{2}.$$

3.2.2. En déduire que la relation (2) est encore vérifiée dans ce cas.

6.2 Corrigé

Problème 1

On est heureux de reconnaître les fontions cosinus et sinus hyperboliques notées habituellement $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$.

I.1. On a $e^0 = 1$, $c(0) = 1$ et $s(0) = 0$. En utilisant une calculatrice, on trouve $c(1) \simeq 1,5431$ et $s(1) \simeq 1,1752$, donc $c(1) \simeq 1,54$ et $s(1) \simeq 1,17$ à 10^{-2} près par défaut.

I.2. Les fonctions c et s sont définies sur tout $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$c(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = c(x) \quad \text{et} \quad s(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -s(x),$$

donc c est paire, et s impaire.

I.3.1. $c(x)^2 - s(x)^2 = \dfrac{1}{4}\left[(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2\right] = \dfrac{1}{4} \times 4e^x e^{-x} = 1.$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} c(x) \geq 1 &\Leftrightarrow e^x + e^{-x} \geq 2 \\ &\Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x + 1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (e^x - 1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

et cette dernière inégalité est vraie quel que soit le réel x.

I.3.2.

$$0 \leq s(x) \;\Leftrightarrow\; 0 \leq \frac{e^x - e^{-x}}{2} \;\Leftrightarrow\; 1 \leq e^{2x}$$

et l'on a bien $1 \leq e^{2x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
Si $x \in \mathbb{R}_+$, $s(x)$ est positif, et on peut écrire les équivalences :

$$s(x) \leq c(x) \;\Leftrightarrow\; s(x)^2 \leq c(x)^2 \;\Leftrightarrow\; 0 \leq c(x)^2 - s(x)^2 \;\Leftrightarrow\; 0 \leq 1.$$

Par suite $s(x) \leq c(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

I.4.1. Les fonctions e^x et e^{-x} sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc aussi leur différence et le produit de leur différence par la constante $1/2$. Ainsi c et s sont dérivables sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{cases} c'(x) = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = s(x) \\ s'(x) = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = c(x). \end{cases}$$

I.4.2. Comme $s'(x) = c(x) \geq 1$ pour tout x, s est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme

$$c'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; s(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; e^x = e^{-x} \;\Leftrightarrow\; e^{2x} = 1 \;\Leftrightarrow\; x = 0,$$

la dérivée $c'(x)$ s'annule en 0. Les tableaux de variations suivants tiennent compte des calculs de limites :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$c'(x)$		$-$	0	$+$	
$c(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$s'(x)$		$+$	1	$+$	
$s(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

I.4.3. Voir FIG. 6.1.

I.5.1. La fonction $g(x) = s(x) - x$ est dérivable et

$$\begin{cases} g'(x) = c(x) - 1 \geq 0 \text{ (d'après I.3.1)} \\ g(0) = s(0) = 0. \end{cases}$$

g est donc croissante sur $\mathbb{R}$. Comme elle s'annule en 0, on aura clairement $g(x) \geq 0$ pour tout x positif, soit $x \leq s(x)$ pour tout $x \geq 0$.

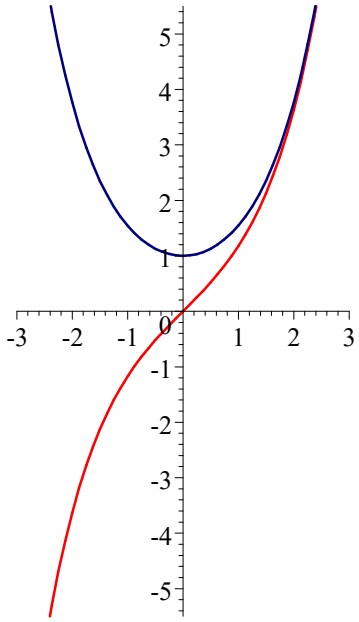


FIG. 6.1 – Graphes des fonctions $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$.

I.5.2. Posons

$$g(x) = c(x) - \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) \quad \text{et} \quad h(x) = s(x) - \left(x + \frac{x^3}{6}\right).$$

• Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g'(x) = s(x) - x \geq 0$ (I.5.1), donc g est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $g(0) = 0$, on obtient : $(\forall x \in \mathbb{R}_+ \; g(x) \geq g(0) = 0)$, et l'inégalité annoncée.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $h'(x) = c(x) - 1 - x^2/2 \geq 0$, donc h est croissante sur $\mathbb{R}_+$. On a $h(0) = 0$, donc $(\forall x \in \mathbb{R}_+ \; h(x) \geq h(0) = 0)$ et l'on a prouvé la seconde inégalité annoncée.

I.6.1. • La fonction $\varphi(x) = 2x - s(x)$ est dérivable, $\varphi'(x) = 2 - c(x)$ et

$$\forall x \in [0,1] \quad 1 \leq c(x) \leq c(1) \simeq 1,54 \leq 1,6.$$

Donc

$$\forall x \in [0,1] \quad \varphi'(x) = 2 - c(x) \geq 2 - 1,6 > 0.$$

La fonction φ est croissante sur $[0,1]$, donc $\varphi(x) = 2x - s(x) \geq \varphi(0) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$, c'est-à-dire

$$\forall x \in [0,1] \quad s(x) \leq 2x.$$

• Posons $\psi(x) = 1 + x^2 - c(x)$. ψ est dérivable et $\psi'(x) = 2x - s(x)$ reste positive sur $[0,1]$. ψ est donc croissante sur $[0,1]$, et comme $\psi(0) = 0$, on en déduit

$$\forall x \in [0,1] \quad \psi(x) = 1 + x^2 - c(x) \geq 0$$

et l'inégalité demandée.

I.6.2. Posons

$$\xi(x) = x + \frac{x^3}{3} - s(x) \quad \text{et} \quad \zeta(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} - c(x).$$

• Pour tout $x \in [0,1]$, $\xi'(x) = 1 + x^2 - c(x) \geq 0$ (I.6.1), donc ξ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $\xi(0) = 0$, on obtient : $(\forall x \in [0,1] \ \ \xi(x) \geq \xi(0) = 0)$, soit

$$\forall x \in [0,1] \quad s(x) \leq x + \frac{x^3}{3}.$$

• On recommence : de $\zeta'(x) = x + x^3/3 - s(x) \geq 0$ et $\zeta(0) = 0$, on déduit $(\forall x \in [0,1] \ \ \zeta(x) \geq 0)$, soit

$$\forall x \in [0,1] \quad c(x) \leq 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12}.$$

I.6.3. Les questions I.5.2 et I.6.2 permettent d'écrire

$$0 \leq c(x) - \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) \leq \frac{x^4}{12} \leq \frac{1}{12}.$$

Elles donnent aussi

$$x + \frac{x^3}{6} \leq s(x) \leq x + \frac{x^3}{3}$$

soit

$$0 \leq s(x) - \left(x + \frac{x^3}{6}\right) \leq \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{6} = \frac{x^3}{6} \leq \frac{1}{6}.$$

II.1. • Pour tout x fixé, $c(t)$ et $x - t$ sont des fonctions de classe C^1 (et même indéfiniment dérivables) sur $\mathbb{R}$. On peut donc utiliser une intégration par partie sur l'intervalle $[0,x]$:

$$\int_0^x (x-t)\, c(t)\ dt = \left[(x-t)\, s(t)\right]_0^x + \int_0^x s(t)\ dt = \left[c(t)\right]_0^x = c(x) - 1.$$

• Avec deux intégrations par parties,

$$\begin{aligned} \int_0^x (x-t)\, c(t)\ dt &= \left[-\frac{(x-t)^2}{2} c(t)\right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} s(t)\ dt \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2\, s(t)\ dt \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^x (x-t)^2 s(t)\ dt &= \left[-\frac{(x-t)^3}{3}s(t)\right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3}c(t)\ dt \\ &= \frac{1}{3}\int_0^x (x-t)^3 c(t)\ dt.\end{aligned}$$

On en déduit

$$c(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!}c(t)\ dt.$$

II.2. On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 1$, la formule a été démontrée à la question précédente. Si la formule est vraie au rang n, montrons qu'elle est encore vraie au rang $n+1$ en faisant deux intégrations par parties. On a

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}c(t)\ dt &= \left[-\frac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!}c(t)\right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!}s(t)\ dt \\ &= \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!}s(t)\ dt\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!}s(t)\ dt &= \left[-\frac{(x-t)^{2n+3}}{(2n+3)!}s(t)\right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+3}}{(2n+3)!}c(t)\ dt \\ &= \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+3}}{(2n+3)!}c(t)\ dt,\end{aligned}$$

donc

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}c(t)\ dt = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+3}}{(2n+3)!}c(t)\ dt. \quad (*)$$

Dans la formule au rang n, il suffit de remplacer l'intégrale en utilisant $(*)$ pour obtenir la formule au rang $n+1$, et conclure.

II.3. La fonction c admet un minimum absolu en 0, donc $c(t) \leq c(a)$ pour tout $t \in [0,a]$ et

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{(a-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}c(t)\ dt &\leq \frac{c(a)}{(2n+1)!}\int_0^a (a-t)^{2n+1}\ dt \\ &\leq \frac{c(a)}{(2n+1)!}\left[-\frac{(a-t)^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^a = \frac{a^{2n+2}}{(2n+2)!}c(a).\end{aligned}$$

II.4.1. On a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{a^{2n+2}}{(2n+2)!} \times \frac{(2n)!}{a^{2n}} = \frac{a^2}{(2n+2)(2n+1)}$$

donc $\lim v_{n+1}/v_n = 0$ et il existe un entier N tel que

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{1}{2}.$$

II.4.2. On montre que la propriété $H(n)$: " $v_n \leq v_N/2^{n-N}$ " est vraie pour tout $n \geq N$ en raisonnant par récurrence sur n.

- Initialisation : $H(N)$ est vraie car $v_N \leq v_N$.
- Hérédité : Si $n \geq N$,

$$\begin{aligned} H(n) \text{ vraie} \quad &\Rightarrow \quad v_n \leq \frac{v_N}{2^{n-N}} \\ &\Rightarrow \quad v_{n+1} \leq \frac{1}{2} v_n \leq \frac{1}{2} \times \frac{v_N}{2^{n-N}} = \frac{v_N}{2^{n+1-N}} \\ &\Rightarrow \quad H(n+1) \text{ vraie.} \end{aligned}$$

II.4.3. On a $0 \leq v_n \leq v_N/2^{n-N}$ pour tout n supérieur à N. Comme $\lim\left(v_N/2^{n-N}\right) = 0$, le Théorème des gendarmes montre que $\lim v_n = 0$.

II.5. D'après II.2 :

$$u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a^{2k}}{(2k)!} = c(a) - \int_0^a \frac{(a-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} c(t)\, dt$$

D'après II.3, et comme $a - t$ et $c(t)$ sont positifs quel que soit $t \in [0, a]$,

$$0 \leq \int_0^a \frac{(a-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} c(t)\, dt \leq \frac{a^{2n+2}}{(2n+2)!} c(a) = v_{2n+2} c(a).$$

Comme $\lim v_{2n+2} = 0$, on obtient

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^a \frac{(a-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} c(t)\, dt = 0,$$

donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = c(a)$.

III.1. On a

$$x^2 - y^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; y^2 = x^2 - 1 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1 \\ y = \pm\sqrt{x^2 - 1}. \end{cases}$$

$\mathcal{H}^+$ est donc le graphe de la fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & [1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{x^2-1}. \end{array}$$

III.2. On a $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1-\dfrac{1}{x}} = 1$. Puisque

$$f(x) - x = \sqrt{x^2-1} - x = \frac{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}{\sqrt{x^2-1}+x} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x},$$

on trouve $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = 0$, et la droite d'équation $y = x$ sera asymptote au graphe de f lorsque x tend vers $+\infty$.

III.3. La courbe $\mathcal{H}$ est symétrique par rapport aux axes de coordonnées. Par exemple, la symétrie par rapport à l'axe des x se démontre en choisissant un point M quelconque de $\mathcal{H}$, en notant que ses coordonnées (x,y) vérifient $x^2-y^2=1$, puis en s'apercevant que le point N de coordonnées $(x,-y)$ vérifie encore $x^2-(-y)^2=1$, donc appartient à $\mathcal{H}$. Comme N est l'image de M par la réflexion s de base l'axe des x, on a montré l'inclusion $s(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$. Comme s est involutive, on en déduit $s(s(\mathcal{H})) \subset s(\mathcal{H})$, c'est-à-dire $\mathcal{H} \subset s(\mathcal{H})$. Finalement $s(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$.
Pour construire $\mathcal{H}$, il suffit de construire $\mathcal{H}^+$, puis de compléter par symétrie par rapport aux axes de coordonnées.

III.4. f est dérivable sur $]1,+\infty[$, de dérivée $f'(x) = x/\sqrt{x^2-1}$ toujours positive. C'est donc une fonction croissante sur $[1,+\infty[$.
Comme $\lim_{x\to1_+} f'(x) = +\infty$, $\mathcal{H}^+$ admet une demi-tangente verticale en 1. De plus $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, et on connaît l'asymptote de $\mathcal{H}^+$ pour x tendant vers $+\infty$. Il ne reste plus qu'à tracer la courbe (FIG. 6.2).

III.5.1. Par symétrie, $\mathcal{A}(x)$ vaut quatre fois la différence entre l'aire $\mathcal{A}_{OMH}$ du triangle OMH, où H représente le projeté de M sur l'axe des abscisses, et l'aire de la partie située sous la courbe de f entre les droites verticales passant par les points $A(1,0)$ et H. Comme

$$\mathcal{A}_{OMH} = \frac{OH \times MH}{2} = \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2},$$

on trouve

$$\mathcal{A}(x) = 4\left(\frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} - F(x)\right) = 4g(x).$$

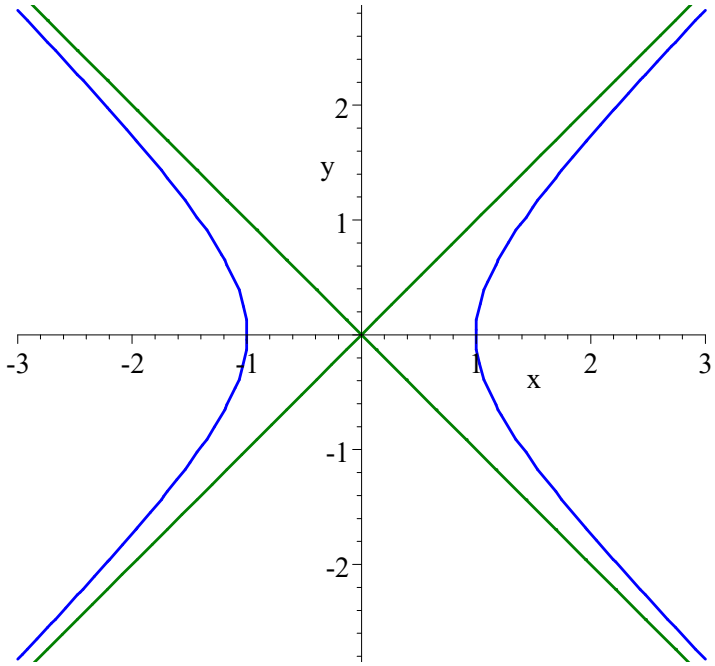


FIG. 6.2 – Hyperbole équilatère $x^2 - y^2 = 1$.

III.5.2. g est dérivable sur $]1, +\infty[$, de dérivée

$$g'(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2-1} + x\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right) - \sqrt{x^2-1} = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}$$

toujours strictement positive. Les fonctions $g(x)$ et $\mathcal{A}(x)$ sont donc strictement croissantes sur $[1, +\infty[$.

III.5.3. Pour tout $x > 1$,

$$g'(x) \geq \frac{1}{2x} \quad \Leftrightarrow \quad x \geq \sqrt{x^2-1} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \geq x^2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \geq 0,$$

donc $g'(x) \geq 1/2x$.

III.5.4. • La fonction $\eta(x) = g(x) - \frac{1}{2}\ln x$ est continue sur $[1, +\infty[$, dérivable sur $]1, +\infty[$, de dérivée $\eta'(x) = g'(x) - \frac{1}{2x}$ positive sur $]1, +\infty[$. Elle est donc croissante sur $[1, +\infty[$, et vérifie $\eta(x) \geq \eta(1) = 0$ pour tout $x \geq 1$. Autrement dit

$$\forall x \geq 1 \qquad g(x) \geq \frac{1}{2}\ln x.$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, on en déduit

$$\lim_{x\to+\infty} \mathcal{A}(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$

• Les fonctions $\mathcal{A}$ et g sont continues et strictement croissantes sur $[1, +\infty[$, tendent vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, et vérifient $\mathcal{A}(1) = g(1) = 0$. Ce sont donc des bijections croissantes de $[1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. Etant donné $a \geq 0$, il existera un unique réel x_a supérieur à 1 tel que $\mathcal{A}(x_a) = 2a$.

III.6.1. Les vecteurs $\overrightarrow{I}$ et $\overrightarrow{J}$ sont unitaires et dirigent les asymptotes $y = -x$ et $y = x$ de l'hyperbole $\mathcal{H}$. On a

$$\overrightarrow{I}.\overrightarrow{J} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j})(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) = \frac{1}{2}(||\overrightarrow{i}||^2 - ||\overrightarrow{j}||^2) = 0,$$

donc $\overrightarrow{I}$ et $\overrightarrow{J}$ sont orthogonaux. $\mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ est donc un repère orthonormal du plan.

III.6.2. La matrice de passage de $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ vers $\mathcal{R}'$ est

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

et les formules de changement de repère sont

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y \\ y = \frac{-1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y. \end{cases}$$

III.6.3. L'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $x^2 - y^2 = 1$ dans $\mathcal{R}$ admettra l'équation

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y\right)^2 - \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y\right)^2 = 1,$$

soit $XY = 1/2$, dans $\mathcal{R}'$.

III.7.1. On résout

$$\begin{cases} 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y \\ 0 = \frac{-1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y \end{cases}$$

pour obtenir $(X, Y) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Les coordonnées de A sont $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ dans le nouveau repère $\mathcal{R}'$.

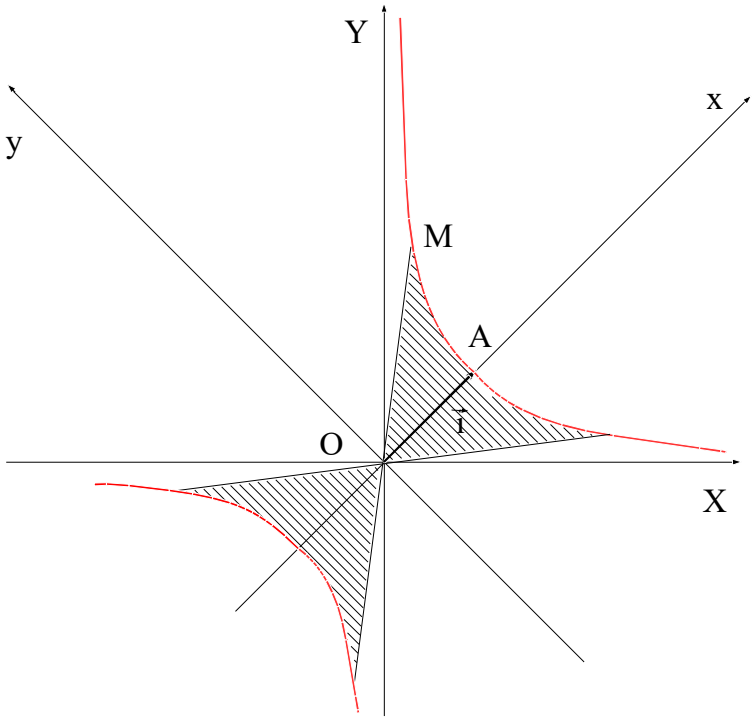


FIG. 6.3 – Question III.7.2.

III.7.2. Voir Fig. 6.3.

III.7.3. On a

$$\mathcal{A}\left(c\left(a\right)\right)=4g\left(c\left(a\right)\right)=4\left(\frac{c\left(a\right)\sqrt{c\left(a\right)^{2}-1}}{2}-F\left(c\left(a\right)\right)\right)$$

et $\sqrt{c\left(a\right)^{2}-1}=\sqrt{s\left(a\right)^{2}}=\left|s\left(a\right)\right|=s\left(a\right)$ puisque $s\left(a\right)>0$ dès que $a>0$. Donc

$$\mathcal{A}\left(c\left(a\right)\right)=4\left(\frac{s\left(a\right)c\left(a\right)}{2}-F\left(c\left(a\right)\right)\right)=s\left(2a\right)-4F\left(c\left(a\right)\right).$$

En faisant le changement de variable $t=c\left(u\right)$ dans l'intégrale

$$F\left(c\left(a\right)\right)=\int_{1}^{c(a)}\sqrt{t^{2}-1}\,dt,$$

on trouve

$$\begin{aligned} F(c(a)) &= \int_0^a \sqrt{c(u)^2 - 1}\, s(u)\, du \\ &= \int_0^a s(u)^2\, du \\ &= \frac{1}{4}\int_0^a \left(e^u - e^{-u}\right)^2 du \;=\; \frac{1}{4}\int_0^a \left(e^{2u} + e^{-2u} - 2\right) du. \end{aligned}$$

Comme $s(u)^2 = (e^u - e^{-u})^2 = e^{2u} + e^{-2u} - 2$,

$$F(c(a)) = \frac{1}{4}\left[\frac{e^{2u}}{2} + \frac{e^{-2u}}{-2} - 2u\right]_0^a = \frac{1}{4}(s(2a) - 2a),$$

et $\mathcal{A}(c(a)) = s(2a) - (s(2a) - 2a) = 2a$.

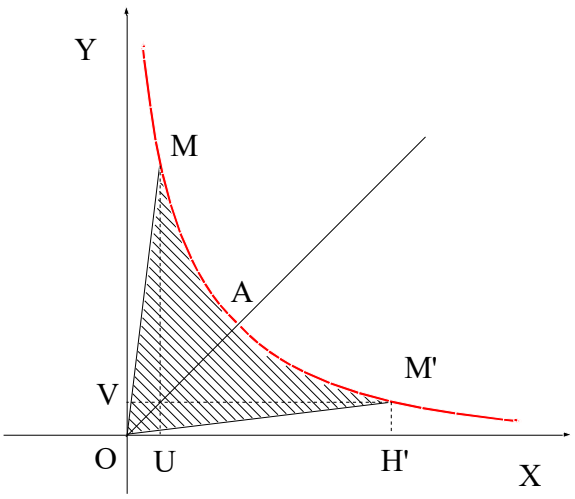


FIG. 6.4 – Utilisation du nouveau repère $\mathcal{R}'$

Autre méthode (utilisant le repère $\mathcal{R}'$) :
Les coordonnées de M sont $(c(a), s(a))$ dans $\mathcal{R}$, et $(e^{-a}/\sqrt{2}, e^a/\sqrt{2})$ dans $\mathcal{R}'$. M' est le symétrique de M par rapport à la première bissectrice, et l'on sait que $\mathcal{A}(c(a))$ vaut 2 fois l'aire hachurée dans la FIG. 6.4. Sur cette figure, les triangles OUM et OVM' sont symétriques par rapport à la première bissectrice, donc les triangles OUM, OVM' et $OH'M'$ ont même aire. Cela permet

de voir que l'aire hachurée est égale à l'aire sous la courbe $Y = 1/2X$ entre les droites verticales passant par U et H'. Ainsi :

$$\mathcal{A}\left(c\left(a\right)\right) = 2\int_{e^{-a}/\sqrt{2}}^{e^{a}/\sqrt{2}} \frac{1}{2X}\, dX = \left[\ln X\right]_{e^{-a}/\sqrt{2}}^{e^{a}/\sqrt{2}} = 2a.$$

III.7.4. Puisque $\mathcal{A}\left(c\left(a\right)\right) = 2a$, l'aire hachurée vaut $2a$ si et seulement si les coordonnées de M sont $\left(c\left(a\right), s\left(a\right)\right)$.

Problème 2

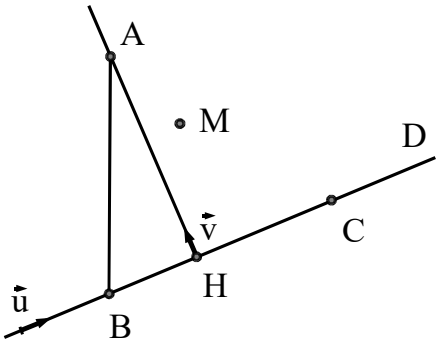


FIG. 6.5 – Question I.1.

I.1. Notons $\mathcal{P}_A$ le demi-plan de frontière (BC) contenant A. Notons

$$\begin{cases} \overrightarrow{HM} = x\,\overrightarrow{u} + y\,\overrightarrow{v} \\ \overrightarrow{BM} = x'\overrightarrow{BC} + y'\overrightarrow{BA}. \end{cases}$$

On a

$$\begin{cases} \overrightarrow{HM}.\overrightarrow{v} = (x\,\overrightarrow{u} + y\,\overrightarrow{v}).\overrightarrow{v} = y \\ \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{v} = (x'\overrightarrow{BC} + y'\overrightarrow{BA}).\overrightarrow{v} = y'\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{v} = y'\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{v} = y'HA \end{cases}$$

mais aussi $\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{v}$. Par suite $y = y'HA$, et les coordonnées y et y' seront toujours de même signe, et s'annuleront en même temps. On obtient bien :

$$M \in \mathcal{P}_A \;\Leftrightarrow\; y > 0 \;\Leftrightarrow\; y' > 0.$$

Autre solution : On n'est pas obligé d'utiliser le produit scalaire. On peut se contenter de remarquer l'existence d'un réel λ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{BC}$, puis d'écrire

$$\overrightarrow{HM} = x\,\overrightarrow{u} + y\,\overrightarrow{v} = x\lambda\overrightarrow{BC} + \frac{y}{HA}\overrightarrow{HA}.$$

Comme $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BA} = \mu\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$ (pour un réel μ convenable : il en existe un !), il est facile d'exprimer $\overrightarrow{BM}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM} &= \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HM} \\ &= -\mu\overrightarrow{BC} + \left(x\lambda\overrightarrow{BC} + \frac{y}{HA}(\mu\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA})\right) \\ &= \left(x\lambda - \mu + \frac{y\mu}{HA}\right)\overrightarrow{BC} + \frac{y}{HA}\overrightarrow{BA}.\end{aligned}$$

Avec les notations de $(*)$, on obtient finalement $y' = y/HA$, de sorte que y soit strictement positif si et seulement si y' l'est.

I.2. Notons T l'intérieur du triangle ABC, et $\mathcal{P}_A$ (resp. $\mathcal{P}_B$, $\mathcal{P}_C$) le demi-plan ouvert de frontière (BC) (resp. (CA), (AB)) contenant A (resp. B, C). La question précédente permet d'écrire :

$$\begin{aligned}M \in T \quad &\Leftrightarrow \quad M \in \mathcal{P}_A \cap \mathcal{P}_B \cap \mathcal{P}_C \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Ordonnée de } M \text{ dans } (B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \text{ strictement positive} \\ \text{Ordonnée de } M \text{ dans } (C, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \text{ strictement positive} \\ \text{Ordonnée de } M \text{ dans } (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \text{ strictement positive.} \end{cases} \quad (S)\end{aligned}$$

Si M est barycentre de A, B, C affectés des coefficients normalisés a, b, c (i.e. tels que $a + b + c = 1$),

$$\begin{cases} \overrightarrow{BM} = a\overrightarrow{BA} + c\overrightarrow{BC}, \\ \overrightarrow{CM} = a\overrightarrow{CA} + b\overrightarrow{CB} \\ \overrightarrow{AM} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC} \end{cases}$$

et les ordonnées intervenant dans (S) sont a, b et c. Donc

$$M \in T \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ c > 0. \end{cases}$$

Tout système de coordonnées barycentriques (a', b', c') de M dans le repère (A, B, C) étant proportionnel à (a, b, c), on en déduit que M est intérieur au triangle si et seulement si M est barycentre de A, B, C affectés de coefficients non nuls et de même signe.

II.1.1. Un vecteur directeur de Δ_A est

$$\overrightarrow{u}_A = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\gamma} + \frac{\overrightarrow{AC}}{\beta}.$$

Ainsi

$$M(x,y) \in \Delta_A \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = t\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{\gamma} + \frac{\overrightarrow{AC}}{\beta}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = t/\gamma \\ y = t/\beta \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{\gamma}{\beta}x.$$

II.1.2. La droite d'équation $x + y = 1$ passe par les points de coordonnées $(1,0)$ et $(0,1)$, c'est-à-dire par B et C. Une équation de (BC) est donc : $x + y = 1$.

II.1.3. Puisque

$$\begin{cases} y = \frac{\gamma}{\beta}x \\ x + y = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\gamma}{\beta}x \\ \left(1 + \frac{\gamma}{\beta}\right)x = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\gamma}{\beta+\gamma} \\ x = \frac{\beta}{\beta+\gamma}, \end{cases}$$

le point A' a pour coordonnées $(\beta/(\beta+\gamma), \gamma/(\beta+\gamma))$.

II.2.1. Puisque $\overrightarrow{AA'} = \frac{\beta}{\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$, A' est barycentre de $B(\beta)$, $C(\gamma)$.

II.2.2. Soit I le barycentre de $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$. Par associativité, I est barycentre de $A(\alpha)$, $A'(\beta+\gamma)$, donc appartient à la bissectrice $\Delta_A = (AA')$. En reprenant la question II.2.1 avec B', puis C', et en utilisant l'associativité du barycentre, on montrerait de la même façon que I appartient à Δ_B et Δ_C. Le point I est donc le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC, et $I = \omega$.

II.2.3. Les questions II.2.2 et I.2 montrent que ω appartient toujours à l'intérieur du triangle ABC.

III.1. O appartient à la médiatrice de $[BC]$, qui n'est autre que l'axe des y, donc ses coordonnées sont de la forme $(0, y_O)$. Le point O appartient aussi à la médiatrice de $[AC]$ donc $OA^2 = OC^2$. Cette égalité s'écrit successivement :

$$x_A^2 + (y_A - y_O)^2 = \frac{\alpha^2}{4} + y_O^2$$
$$x_A^2 + y_A^2 - 2y_O y_A = \frac{\alpha^2}{4}$$

soit $y_O = \frac{y_A}{2} + \frac{x_A^2 - \frac{\alpha^2}{4}}{2y_A}$ comme annoncé.

III.2. Un petit calcul donne :

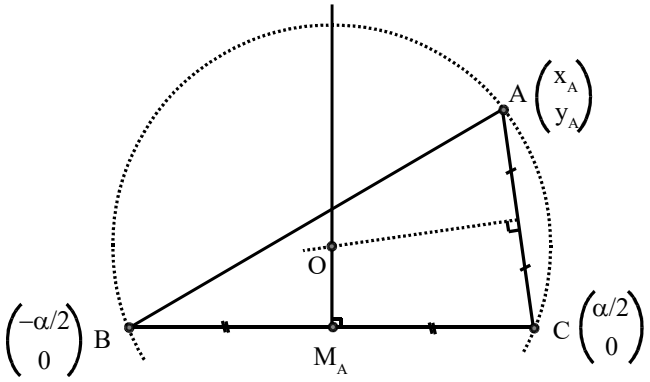


FIG. 6.6 – Position du centre du cercle circonscrit

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -\alpha/2 - x_A \\ -y_A \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \alpha/2 - x_A \\ -y_A \end{pmatrix} = x_A^2 + y_A^2 - \frac{\alpha^2}{4} = 2y_O y_A.$$

III.3. D'après I.1, les points O et A sont dans le même demi-plan ouvert de frontière (BC) si et seulement si l'ordonnée de O dans le repère $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ est strictement positive. En notant $\overrightarrow{BO} = \lambda\overrightarrow{BC} + \mu\overrightarrow{BA}$, cela revient à dire que $\mu > 0$. On a

$$\begin{pmatrix} x_O \\ y_O \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_A + \alpha/2 \\ y_A \end{pmatrix}$$

donc $\mu = y_O/y_A$ (par hypothèse $y_A \neq 0$). Comme $2y_O y_A = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mu > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad y_O y_A > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \gamma\beta \cos \widehat{BAC} > 0 \ \Leftrightarrow \ \cos \widehat{BAC} > 0 \ \Leftrightarrow \ (\widehat{BAC} \text{ aigu}) \end{aligned}$$

et conclure.

III.4. Ce qu'on a fait avec A, on peut le recommencer avec B puis C. On peut énoncer :

> Le centre du cercle circonscrit à un triangle est à l'intérieur de celui-ci si et seulement si le triangle est acutangle.

Remarque : Un triangle est "acutangle" si ses trois angles sont aigus. Un triangle qui n'est pas acutangle est appelé "obtusangle".

IV.1. Le point ω est à l'intérieur du triangle et à égale distance des côtés du triangle. Si ω_A (resp. ω_B, ω_C) désigne le projeté de ω sur (BC) (resp. (CA),

(AB)), et si r désigne le rayon du cercle inscrit, $\omega\omega_A = \omega\omega_A = \omega\omega_A = r$ donc

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{ABC} &= \mathcal{A}_{MBC} + \mathcal{A}_{MCA} + \mathcal{A}_{MAB} \\ &= \frac{r\alpha}{2} + \frac{r\beta}{2} + \frac{r\gamma}{2} \\ &= \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} r.\end{aligned}$$

IV.2.1. On a

$$\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{OBC} + \mathcal{A}_{OCA} + \mathcal{A}_{OAB} = \frac{\alpha OM_A}{2} + \frac{\beta OM_B}{2} + \frac{\gamma OM_C}{2}$$

donc $2\mathcal{A}_{ABC} = \alpha OM_A + \beta OM_B + \gamma OM_C$.

IV.2.2. O est à l'intérieur du triangle ABC, donc ce triangle est acutangle (III.4) et tous ses angles ont un cosinus strictement positif. On en déduit

$$\overrightarrow{BH}_A.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \gamma\alpha\cos\widehat{ABC} > 0$$

donc $\overline{BH}_A \times \overline{BC} > 0$. Cela signifie que H_A appartient à la demi-droite ouverte $]BC)$ d'origine B et contenant C. Le même raisonnement donne $\overrightarrow{CH}_A.\overrightarrow{CA} > 0$, donc $H_A \in]CB)$. En conclusion $H_A \in]BC) \cap]CB) =]BC[$. On ferait de même avec les pieds des autres hauteurs.

IV.2.3. On se réfère à la FIG. 6.7. Les triangles ABH_B et ACH_C sont semblables car possèdent deux angles géométriques respectivement égaux :

$$\begin{cases} ABH_B \text{ est rectangle en } H_B, \text{ et } ACH_C \text{ est rectangle en } H_C \\ \widehat{BAH}_B = \widehat{BAC} = \widehat{CAH}_C. \end{cases}$$

Les triangles ACH_C et OBM_A sont indirectement semblables (dans cet ordre et non dans l'ordre indiqué par l'énoncé !) car possèdent deux angles orientés de droites respectivement opposés. Il s'agit des angles en H_C et M_A, qui sont droits (donc opposés modulo π), et des angles orientés de droites (OB, OM_A) et (AC, AH_C) qui sont opposés comme on le vérifie en utilisant le Théorème de l'angle inscrit. En effet, un angle au centre valant deux fois l'angle inscrit correspondant,

$$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \ \ (2\pi)$$

soit

$$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}_A) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AH}_C, \overrightarrow{AC}) \ \ (\pi)$$

en tenant compte du fait que (OM_A) est la bissectrice intérieure issue de O du triangle isocèle OBC.

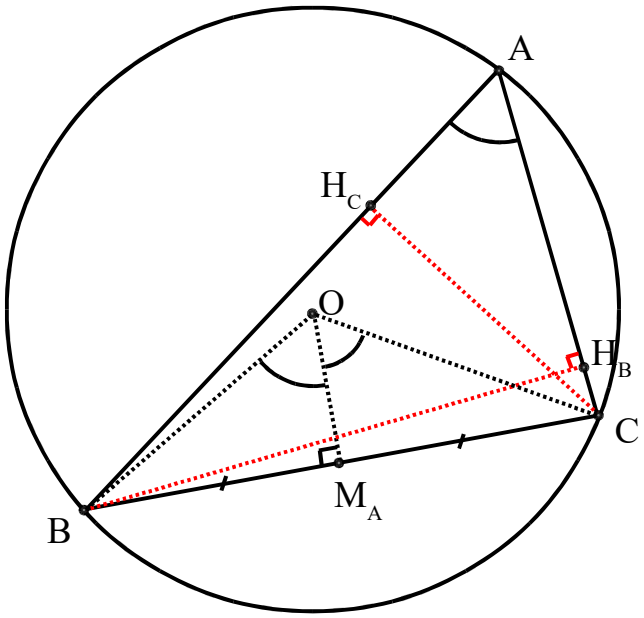


FIG. 6.7 – Question IV.2.3.

En conclusion, les triangles ABH_B, ACH_C et OBM_A sont semblables dans cet ordre.

Remarque : L'énoncé n'a pas été sympathique en ne nous livrant pas les trois triangles semblables "écrits dans le bon ordre des sommets". J'ai perdu du temps à me rendre compte que les triangles ACH_C et BOM_A n'étaient pas semblables dans cet ordre d'énumération des sommets, bien qu'il n'y ait pas de doute que ces triangles soient rectangles en H_C et M_A. On perd un temps précieux à étudier la figure... et l'ordre d'énumération des sommets est important pour traiter la question et répondre à la question suivante !

IV.2.4. Puisque les triangles ABH_B, ACH_C et OBM_A sont semblables (dans cet ordre),

$$\frac{OM_A}{OB} = \frac{AH_B}{AB} = \frac{AH_C}{AC}$$

soit

$$\frac{OM_A}{R} = \frac{AH_B}{\gamma} = \frac{AH_C}{\beta} = \frac{AH_B + AH_C}{\gamma + \beta},$$

et l'on obtient bien $(\beta + \gamma)\, OM_A = R\,(AH_B + AH_C)$.

IV.2.5. Ce sont :

$$\begin{cases} (\gamma+\alpha)\,OM_B = R\,(BH_C + BH_A) \\ (\alpha+\beta)\,OM_C = R\,(CH_A + CH_B)\,. \end{cases}$$

IV.2.6. Les pieds des hauteurs d'un triangle acutangle appartenant aux côtés du triangle (IV.2.2), $AH_C + BH_C = \gamma$, $BH_A + CH_A = \alpha$ et $CH_B + AH_B = \beta$. En sommant les trois égalités obtenues aux questions IV.2.4 et IV.2.5, on trouve

$$(\beta+\gamma)\,OM_A + (\gamma+\alpha)\,OM_B + (\alpha+\beta)\,OM_C = R\,(\alpha+\beta+\gamma)\,. \quad (\dagger)$$

De IV.1 et IV.2.1 on déduit

$$\alpha OM_A + \beta OM_B + \gamma OM_C = 2\mathcal{A}_{ABC} = (\alpha+\beta+\gamma)\,r. \quad (\ddagger)$$

En additionant (†) et (‡), on obtient

$$(\alpha+\beta+\gamma)\,[OM_A + OM_B + OM_C] = (\alpha+\beta+\gamma)\,(R+r)\,,$$

soit $OM_A + OM_B + OM_C = R + r$.

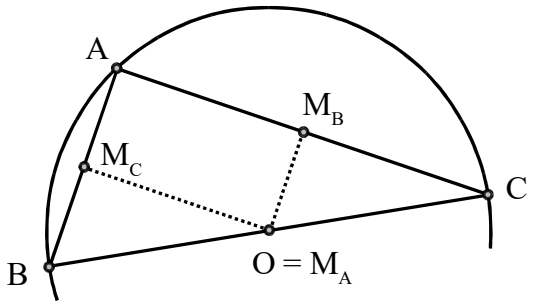


FIG. 6.8 – Cas particulier où ABC est rectangle

IV.3.1. Le point O est équidistant de A, B et C. S'il appartient à $[BC]$, c'est le milieu de $[BC]$ et A appartient au cercle de diamètre $[BC]$, donc ABC est rectangle en A (FIG. 6.8).

IV.3.2.1. O est le milieu de $[BC]$ donc $R = OB = \alpha/2$. L'aire $\mathcal{A}_{ABC}$ du triangle rectangle ABC est $\beta\gamma/2$, et la formule du IV.1 donne

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} r = \frac{\beta\gamma}{2},$$

d'où $$r = \frac{\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma} \quad \text{et} \quad R + r = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Puisque $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ (Théorème de Pythagore),

$$\begin{aligned} R + r &= \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\gamma + 2\beta\gamma}{2(\alpha+\beta+\gamma)} \\ &= \frac{\beta^2 + \gamma^2 + \alpha\beta + \alpha\gamma + 2\beta\gamma}{2(\alpha+\beta+\gamma)} \\ &= \frac{\beta(\beta+\alpha+\gamma) + (\gamma+\alpha+\beta)\gamma}{2(\alpha+\beta+\gamma)} = \frac{\beta+\gamma}{2}. \end{aligned}$$

IV.3.2.2. Ici $O = M_A$ et le quadrilatère AM_BOM_C est un rectangle (voir FIG. 6.8), donc $OM_B = AM_C = \gamma/2$ et $OM_C = AM_B = \beta/2$. On en déduit

$$OM_A + OM_B + OM_C = \frac{\beta+\gamma}{2} = R + r,$$

c'est-à-dire la formule (2) dans ce cas particulier.

Chapitre 7

Année 2008

7.1 Énoncé

Problème 1

Ce problème a pour objet une approche du paradoxe de Bertrand.

Notations : Dans le problème, le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. $\mathcal{C}$ désigne le cercle de centre O et de rayon R, R étant un réel strictement positif donné.

Partie I

Etude des propriétés des triangles équilatéraux inscrits dans le cercle $\mathcal{C}$.

1. Soit A un point donné du cercle $\mathcal{C}$. Construire à la règle et au compas un triangle équilatéral ABC inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$. Préciser les étapes successives de la construction.
Dans toute la suite du problème A, B, C désignent trois points du cercle $\mathcal{C}$ tels que le triangle ABC soit équilatéral. On note A' le milieu du segment $[BC]$ et A'' le point diamétralement opposé au point A sur le cercle $\mathcal{C}$.

2. On se propose de déterminer la longueur L des côtés du triangle ABC.

2.1. Déterminer le quotient de longueurs AO/AA'.

2.2. En déduire la longueur AA' en fonction de R.

2.3. Démontrer que $L = R\sqrt{3}$.

3. Soit U un point du cercle $\mathcal{C}$ distinct de A. On choisit V et W deux points du cercle $\mathcal{C}$ tels que le triangle UVW soit un triangle équilatéral inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$.

3.1. Démontrer que les triangles ABC et UVW sont isométriques.

3.2. Préciser une isométrie du plan transformant le triangle ABC en le triangle UVW en distinguant les cas de triangles directement ou non directement isométriques.

4. Justifier les quatre caractérisations de la droite (AA') comme droite remarquable du triangle ABC.

5. Déterminer la longueur de chacun des arcs du cercle $\mathcal{C}$ de part et d'autre de la droite (BC).

Partie II

Quelques comparaisons de longueurs de segments.

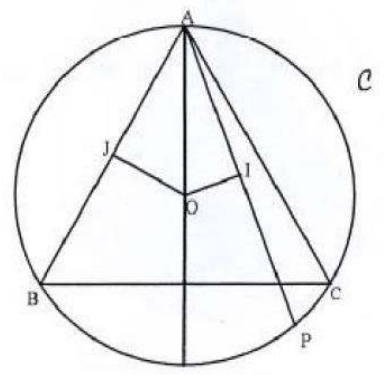
Dans cette partie, les points A, B et C sont fixés sur le cercle $\mathcal{C}$.

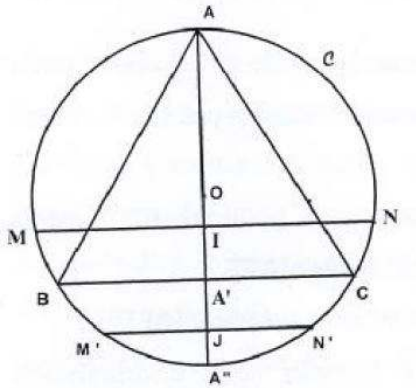
1. Soit P un point du cercle $\mathcal{C}$, distinct du point A. On note I le projeté orthogonal du point O sur la droite (AP) et J le projeté orthogonal du point O sur la droite (AB).

1.1. Démontrer que si le point P appartient à l'arc $\overset{\frown}{BC}$ du cercle $\mathcal{C}$ ne contenant pas le point A, alors $IA \geq JA$.

1.2. En déduire que, si le point P appartient à l'arc du cercle $\mathcal{C}$ ne contenant pas le point A, alors $AP \geq L$.

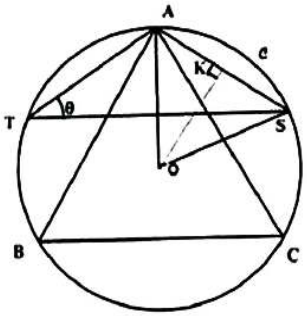
1.3. Montrer que si le point P appartient à l'arc du cercle $\mathcal{C}$ contenant le point A, alors $AP \leq L$.



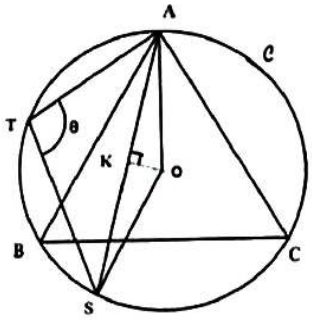


2. Soient M et N deux points distincts du cercle $\mathcal{C}$ tels que la droite (MN) soit perpendiculaire à la droite (AA'') au point I du segment $[OA']$. Soient M' et N' deux points distincts du cercle de $\mathcal{C}$ tels que la droite $(M'N')$ soit perpendiculaire à la droite (AA'') au point J du segment $[A'A'']$.
Démontrer que : $M'N' \leq BC \leq MN$.

Cas où $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$



Cas où $\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi$



3. Soient S et T deux points distincts du cercle $\mathcal{C}$ tous deux distincts du point A. On note θ la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{ATS}$; on a donc $0 < \theta < \pi$. On note K le milieu du segment $[AS]$.

3.1. Calculer les longueurs AK et AS en fonction de R et θ en distinguant les trois cas suivants : $\theta < \dfrac{\pi}{2}$, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, $\theta > \dfrac{\pi}{2}$.

3.2. Démontrer que si $\theta < \pi/3$ alors $AS < L$.

3.3. Comparer les longueurs AS et L lorsque $\theta > 2\pi/3$.

4. Soit D un point du cercle $\mathcal{C}$ distinct des points A et A''. On note ρ le nombre réel égal à la longueur AD. On appelle Γ le cercle de centre D et de rayon ρ.

4.1. Démontrer que le cercle Γ coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux point distincts, le point A et un autre point noté F.

4.2. Démontrer que la droite (OD) est la médiatrice du segment $[AF]$. On note G le milieu du segment $[AF]$.

4.3. Soit D' le point de $\mathcal{C}$ diamétralement opposé à D. Calculer l'aire du triangle ADD' en fonction de R et de ρ.

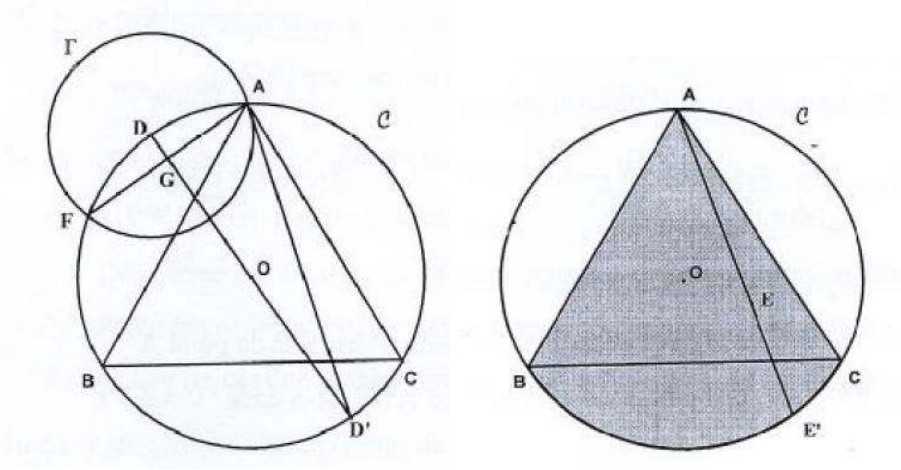
4.4. En déduire la longueur AF en fonction de R et de ρ.

4.5. Résoudre l'inéquation suivante :

$$x\sqrt{4R^2 - x^2} \geq R^2\sqrt{3}$$

pour x nombre réel de l'intervalle $]0; 2R[$.

4.6. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ des nombres réels ρ de l'intervalle $]0; 2R[$ tels que $AF \geq L$ est le segment $\left[R, R\sqrt{3}\right]$.



5. Soit E un point du disque de centre O et de rayon R distinct du point A. La droite (AE) coupe le cercle $\mathcal{C}$ en un point E' autre que le point A.

5.1. Démontrer que $AE' \geq L$ si et seulement si le point E appartient au domaine grisé sur la figure ci-dessus.

5.2. Déterminer l'aire du domaine grisé, ensemble des points E du disque tels que la corde $[AE']$ associée soit de longueur supérieure ou égale à L.

Partie III
Le paradoxe de Joseph Bertrand

Joseph Bertrand fut élève et professeur à l'Ecole polytechnique, puis professeur au Collège de France. Nous lui devons le paradoxe abordé aujourd'hui qui, au même titre que « l'aiguille de Buffon », a contribué à établir la nécessité de préciser le sens de la phrase « choisir au hasard » quand le choix s'opère dans un ensemble infini.

L'énoncé du problème posé par Joseph Bertrand peut être donné sous la forme suivante :

« Traçons au hasard une corde dans un cercle. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit plus longue que le côté d'un triangle équilatéral inscrit dans ce cercle ? »

Nous allons voir que selon la façon de modéliser le problème, le sens donné au terme « choisir au hasard » varie et les résultats relatifs aux probabilités sont différents.

Dans ce qui suit, on adopte les conventions suivantes :

▷ « Choisir au hasard » un réel x dans un intervalle $]a;b[$ (avec $a < b$) signifie que la probabilité que pour tout segment $[c;d]$ inclus dans l'intervalle

$]a;b[$ le réel x appartienne au segment $[c;d]$ vaut $\dfrac{d-c}{b-a}$.

$\triangleright$ « Choisir au hasard » un point M dans un segment $[PQ]$ (avec $P \neq Q$) signifie que pour tout segment $[XY]$ inclus dans le segment $[PQ]$, la probabilité que le point M appartienne au segment $[XY]$ vaut $\dfrac{XY}{PQ}$.

$\triangleright$ « Choisir au hasard » un point M sur le cercle $\mathcal{C}$ signifie que pour tout arc $\overset{\frown}{XY}$ du cercle $\mathcal{C}$, la probabilité que le point M appartienne à l'arc $\overset{\frown}{XY}$ vaut $\dfrac{\text{longueur de } \overset{\frown}{XY}}{\text{périmètre du cercle}}$.

$\triangleright$ « Choisir au hasard » un point M dans un sous-ensemble Ω du plan dont on peut calculer l'aire (et dont l'aire est non nulle) signifie que, pour tout sous-ensemble Δ de Ω dont on peut calculer l'aire, la probabilité que le point M appartienne au sous-ensemble Δ vaut $\dfrac{\text{aire de } \Delta}{\text{aire de } \Omega}$.

1. *Premier modèle proposé.*
On fixe A sur le cercle $\mathcal{C}$. On « choisit au hasard » un point P du cercle $\mathcal{C}$. Calculer la probabilité que la corde $[AP]$ du cercle $\mathcal{C}$ ait une longueur supérieure ou égale à L.

2. *Deuxième modèle proposé.*
On fixe un diamètre $[AA'']$ du cercle $\mathcal{C}$. On « choisit au hasard » un point I du diamètre $[AA'']$ puis on trace la corde $[MN]$ du cercle $\mathcal{C}$ perpendiculaire au diamètre $[AA'']$ au point I. Calculer la probabilité que la corde $[MN]$ ait une longueur supérieure ou égale à L.

3. *Troisième modèle proposé.*
On fixe un point T sur le cercle $\mathcal{C}$. On « choisit au hasard » un réel θ dans l'intervalle $]0;\pi[$ puis on construit une corde $[AS]$ du cercle $\mathcal{C}$ telle que l'angle géométrique $\widehat{ATS}$ ait pour mesure θ. Calculer la probabilité que la corde $[AS]$ ait une longueur supérieure ou égale à L.

4. *Quatrième modèle proposé.*
On fixe un point D du cercle $\mathcal{C}$. On « choisit au hasard » un réel ρ de l'intervalle $]0, 2R[$. Alors le cercle $\mathcal{C}$ et le cercle de centre D et de rayon ρ se coupent en deux points distincts notés A et F. Calculer la probabilité que la corde $[AF]$ du cercle $\mathcal{C}$ ait une longueur supérieure ou égale à L.

5. *Cinquième modèle proposé.*
On fixe un point A sur le cercle $\mathcal{C}$. Puis on « choisit au hasard » un point E à l'intérieur du disque de centre O et de rayon R. La droite (AE) coupe le cercle $\mathcal{C}$ en un point E', distinct du point A. Calculer la probabilité que la

corde $[AE']$ du cercle $\mathcal{C}$ ait une longueur supérieure ou égale à L.

Problème 2

Etude d'une courbe plane définie par une équation implicite

Présentation du problème : On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère la courbe Γ du plan définie par l'équation suivante dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$:

$$y^3 + xy - e^x = 0$$

ce qui signifie qu'un point M du plan de coordonnées (x, y) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un point de la courbe Γ si et seulement si $y^3 + xy - e^x = 0$.

Un logiciel de tracé de courbes nous montre (approximativement) les points de la courbe Γ pour $-4 \leq x \leq 4$ et $-2 \leq y \leq 3$ (voir FIG. 7.1).
Le but de ce problème est l'étude de l'ensemble des points de Γ d'ordonnée

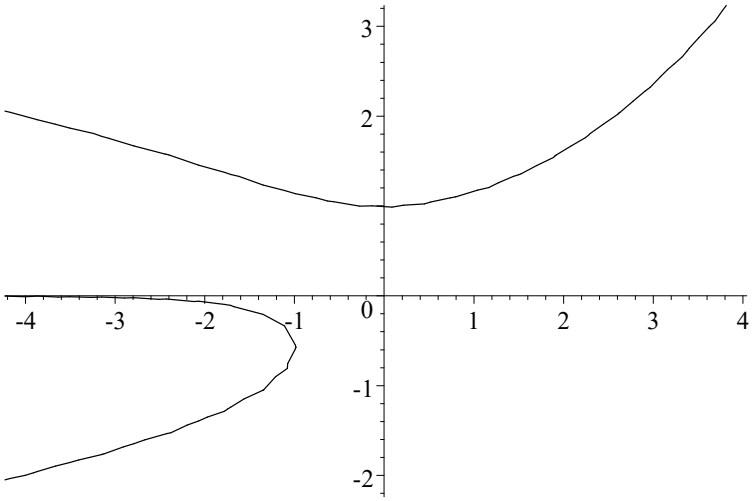


FIG. 7.1 – Courbe $y^3 + xy - e^x = 0$

strictement positive.

La partie I prouve l'existence d'une fonction f telle que l'ensemble des points de Γ d'ordonnée strictement positive est une courbe Γ_1 d'équation $y = f(x)$. La partie II étudie les variations de la fonction f et la partie III permet la mise en évidence d'une courbe asymptote à la courbe Γ_1.

On pourrait également prouver l'existence d'une fonction g telle que l'ensemble

des points de Γ d'ordonnée strictement négative est une courbe Γ_2 d'équation $x = g(y)$ mais cette étude n'est pas développée dans ce problème.

Partie I : Définition de la fonction f

1. Justifier l'existence d'un unique point de Γ d'abscisse $x = 0$.

2. Démontrer qu'aucun point M de Γ n'a une ordonnée nulle c'est-à-dire que l'intersection de Γ avec l'axe $x'Ox$ d'équation $y = 0$ est vide.

3. Dans cette question on note φ_2 la fonction définie pour tout nombre réel t de l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $\varphi_2(t) = t^3 + 2t - e^2$.

3.1. Soit t un nombre réel strictement positif vérifiant l'équation $\varphi_2(t) = 0$, s'il en existe. Que peut-on dire du point M de coordonnées $(2, t)$?

3.2. Justifier que la fonction φ_2 est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et calculer sa dérivée.

3.3. Dresser le tableau de variations de la fonction φ_2.

3.4. En déduire qu'il existe un unique nombre réel y_2 strictement positif tel que $\varphi_2(y_2) = 0$.

3.5. A l'aide de la calculatrice, justifier l'encadrement suivant :

$$\frac{3}{2} < y_2 < \frac{7}{4}.$$

4. Dans cette question on note φ_{-2} la fonction définie pour tout nombre réel t de l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $\varphi_{-2}(t) = t^3 - 2t - e^{-2}$.

4.1. Dresser le tableau de variations de la fonction φ_{-2}.

4.2. En déduire qu'il existe un unique nombre réel y_{-2} tel que $\varphi_{-2}(y_{-2}) = 0$.

4.3. Prouver que $1,45$ est une valeur approchée à 5.10^{-3} près du nombre réel y_{-2}.

5. Dans cette question, x est un nombre réel quelconque fixé. On note φ_x la fonction définie pour tout nombre réel t de l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$\varphi_x(t) = t^3 + xt - e^x.$$

5.1.Justifier que la fonction φ_x est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et calculer sa dérivée.

5.2. Dresser le tableau de variations de la fonction φ_x dans chacun des deux cas suivants :

- $x < 0$,
- $x \geq 0$.

5.3. Déduire de cette étude que, pour tout nombre réel x, il existe un unique nombre y_x strictement positif tel que $\varphi_x(y_x) = 0$. Ce nombre réel y_x est noté $f(x)$.

x désignant un nombre réel fixé, $f(x)$ est donc déterminé par les conditions suivantes :

$$(1) \qquad [f(x)]^3 + xf(x) - e^x = 0 \quad \text{et} \quad f(x) > 0.$$

Ainsi la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. La courbe Γ_1 représentative de la fonction f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est l'ensemble des points de la courbe Γ d'ordonnée strictement positive.

6. *Quelques études de signe*

6.1. Démontrer que, pour tout nombre réel x, on a : $3[f(x)]^2 + x > 0$.

6.2. Démontrer, à l'aide de la question (I.5.2), que pour tout nombre réel x et pour tout nombre réel t strictement positif, les expressions $t^3 + xt - e^x$ et $t - f(x)$ sont de même signe et s'annulent simultanément.

7. *Calcul de quelques valeurs de f*

7.1. Déterminer $f(0)$.

7.2. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près de $f(2)$ et $f(-2)$.

Partie II : Etude des variations de la fonction f

1. Nous admettons que la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1.1. Démontrer, à l'aide des conditions (1) et de la question I.6, qu'on a pour tout nombre réel x :

$$f'(x) = \frac{e^x - f(x)}{3[f(x)]^2 + x}.$$

1.2. En déduire que, pour tout nombre réel x, le réel $f'(x)$ est du signe de $e^{2x} + x - 1$.

1.3. Etudier les variations de la fonction u définie pour tout nombre réel x par : $u(x) = e^{2x} + x - 1$.

1.4. En déduire le signe de $f'(x)$ selon les valeurs du nombre réel x.

2. *Calcul des limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.*

2.1. Démontrer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$.

2.2. Déterminer la limite de $e^x - x^3 - x^2$ lorsque x tend vers $+\infty$. En

déduire qu'il existe un nombre réel strictement positif A tel que, pour tout nombre réel x supérieur ou égal à A, on a : $e^x \geq x^3 + x^2$.

2.3. Démontrer que, pour tout nombre réel x supérieur ou égal à A, on a : $f(x) \geq x$.

2.4. En déduire que la fonction f a une limite lorsque x tend vers $+\infty$ et déterminer cette limite.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

Partie III : Etude d'une courbe asymptote à la courbe Γ_1

Soient f_1 et f_2 deux fonctions définies sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On dit que les courbes d'équations $y = f_1(x)$ et $y = f_2(x)$ sont asymptotes l'une de l'autre au voisinage de $x = -\infty$ quand $\lim\limits_{x \to -\infty} (f_2(x) - f_1(x)) = 0$.

Si de plus pour tout nombre réel x de l'intervalle $]-\infty; 0[$, on a $f_1(x) \leq f_2(x)$, on dit que la courbe d'équation $y = f_2(x)$ est au-dessus de la courbe d'équation $y = f_1(x)$.

1. *Recherche d'une courbe asymptote à Γ_1 au voisinage de $x = -\infty$.*

1.1. Démontrer que, pour tout nombre réel x, on a :

$$f(x) = \sqrt{\frac{e^x}{f(x)} - x}.$$

1.2. Démontrer que la courbe d'équation $y = \sqrt{-x}$ est asymptote à la courbe Γ_1 représentative de la fonction f au voisinage de $x = -\infty$, et déterminer la position relative de ces deux courbes lorsque le nombre réel x décrit l'intervalle $]-\infty; 0[$.

2. Tracer dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe Γ_1 et la courbe d'équation $y = \sqrt{-x}$, avec une unité graphique de 2 cm.

7.2 Corrigé

Problème 1

Partie I
Etude des propriétés des triangles équilatéraux inscrits dans le cercle $\mathcal{C}$.

I.1. La construction de la FIG. 7.2 peut être décrite en deux étapes :

a) Tracer la médiatrice Δ du segment $[OA'']$.

b) Appeler B et C les points d'intersection de Δ et $\mathcal{C}$.

Le triangle ABC est alors équilatéral et inscrit dans $\mathcal{C}$.

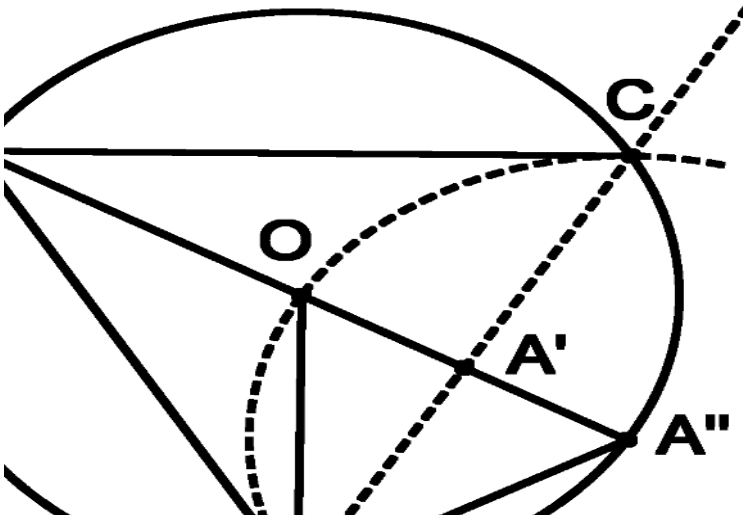


FIG. 7.2 – Triangle équilatéral inscrit dans un cercle

Remarque : L'énoncé demande seulement d'expliciter une construction à la règle et au compas, sans la justifier.
Que dirions-nous pour la justifier si on nous le demandait ? On dira sans doute que, par cette construction, le triangle OBA'' est équilatéral de côté R, donc que l'angle $\widehat{BA''A}$ vaut $\pi/3$ radians. Comme ABA'' est rectangle en B (le point B appartenant au cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AA'']$), on constate que l'angle $\widehat{BAA''}$ vaut $\pi/6$ radians, tout comme par symétrie l'angle $\widehat{A''AC}$.
Par suite $\widehat{BAC} = \pi/3$, et le triangle ABC, clairement isocèle en A, sera équilatéral et inscrit dans $\mathcal{C}$.

I.2.1. O est à la fois le centre du cercle circonscrit au triangle équilatéral ABC et son centre de gravité. On sait que les médianes d'un triangle se coupent au tiers de la base de chacune d'elles, donc

$$\frac{AO}{AA'} = \frac{2}{3}.$$

I.2.2. Comme $AO = R$, la relation précédente donne $AA' = 3R/2$.

I.2.3. Dans le triangle rectangle $AA'C$,

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6} = \cos\widehat{OAC} = \frac{AA'}{AC} = \frac{3R}{2L}$$

d'où $\boxed{L = R\sqrt{3}}$.

I.3.1. D'après I.2 les triangles équilatéraux ABC et UVW ont des côtés de même longueur $L = R\sqrt{3}$, donc sont isométriques si l'on applique le premier cas d'égalité des triangles ([2], Th. 208).

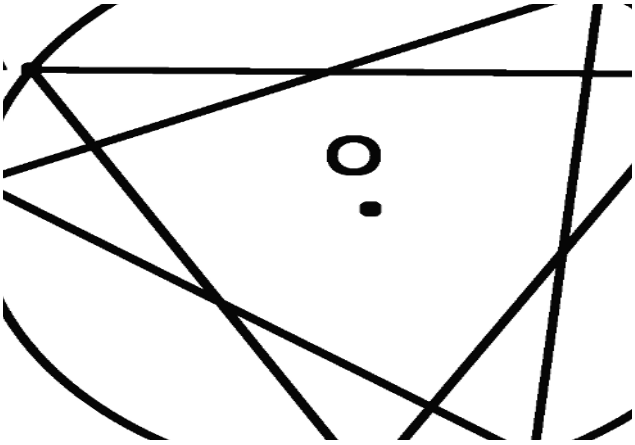


FIG. 7.3 – Question I.3

I.3.2. On peut supposer que le triangle ABC est direct (quitte à orienter autrement le plan). De deux choses l'une :

▶ Si UVW est direct (cas de la FIG. 7.3), notons r la rotation de centre O amenant A sur U. Cette rotation transforme B en un point $r(B)$ appartenant encore à $\mathcal{C}$, et conserve les angles, donc

$$\frac{2\pi}{3} = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{Os(B)}) \ (2\pi).$$

Comme UVW est direct, on obtient

$$(\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{Os(B)}) = \frac{2\pi}{3} = (\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV}) \ (2\pi).$$

de sorte que les demi-droites $[OV)$ et $[Or(B))$ soient confondues. Comme V et $r(B)$ appartiennent au cercle $\mathcal{C}$, on en déduit $V = r(B)$.
En raisonnant de la même façon, on obtiendrait $W = r(C)$, ce qui prouve que la rotation r transforme ABC en UVW (dans cet ordre d'énumération des sommets).

▶ Si UVW est indirect, on recommence le raisonnement précédent en remplaçant la rotation r par la réflexion s de base la médiatrice de $[AU]$. Cette réflexion transforme A en U et "inverse" les angles, donc transforme B en un point $s(B)$ appartenant à $\mathcal{C}$, tel que

$$\frac{2\pi}{3} = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = -(\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{Os(B)}) \ (2\pi)$$

d'où

$$(\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{Os(B)}) = -\frac{2\pi}{3} = (\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV}) \ (2\pi).$$

Par suite $s(B)$ appartient à $\mathcal{C}$ et à la demi-droite $[OV)$, donc $s(B) = V$. On montrerait de la même façon que $s(C) = W$, de sorte que UVW soit l'image de ABC par la réflexion s.

I.4. Par construction, la droite (AA') est la <u>médiane</u> issue de A du triangle ABC. Comme A et A' sont à égale distance de B et C, (AA') est aussi la <u>médiatrice</u> de $[BC]$. Par suite, l'image de la demi-droite $[AB)$ par la réflexion $s_{(AA')}$ par rapport à (AA') est la demi-droite $[AC)$, et cela prouve que (AA') est la <u>bissectrice intérieure</u> issues de A du triangle ABC.
Enfin (AA') est perpendiculaire à (BC) (puisqu'étant la médiatrice de $[BC]$) et passe par A : c'est donc la <u>hauteur</u> issue de A du triangle ABC.

I.5. Le petit arc de $\mathcal{C}$ d'extrémités B et C est défini par un secteur saillant de mesure $2\pi/3$ rd, donc sa longueur est

$$\frac{2\pi R \times 2\pi/3}{2\pi} = \frac{2\pi R}{3}.$$

Le grand arc admettant les mêmes extrémités mesurera

$$\frac{2\pi R \times 4\pi/3}{2\pi} = \frac{4\pi R}{3}.$$

Partie II

Quelques comparaisons de longueurs de segments.

II.1.1. On a

$$\begin{cases} IA = OA \times \cos \widehat{A''AP} \\ JA = OA \times \cos \widehat{BAA''}. \end{cases}$$

De $0 \leq \widehat{A''AP} \leq \widehat{BAA''} = \pi/6$ on tire $\cos \widehat{A''AP} \geq \cos \widehat{BAA''}$ soit $IA \geq JA$.

II.1.2. La droite (OI) est perpendiculaire à (AP) et contient le point O situé à égale distance des extrémités du segment $[AP]$. Il s'agit donc de la médiatrice de $[AP]$, et I est le milieu de $[AP]$.
De même J est le milieu de $[AB]$, et on peut écrire

$$AP = 2\,IA \geq 2\,JA = AB = L,$$

et conclure à $AP \geq L$.

II.1.3. Dans ce cas de figure, $\widehat{OAP} \geq \pi/6$ donc

$$IA = OA \times \cos \widehat{OAP} \leq OA \times \cos \frac{\pi}{6} = JA.$$

On en déduit $2\,IA \leq 2\,JA$, c'est-à-dire $AP \leq L$.

II.2. En utilisant les triangles rectangles OJN', $OA'C$ et OIN, on obtient

$$(1) \quad \begin{cases} OJ = R \cos \widehat{A''ON'} \\ OA' = R \cos \widehat{A''OC} \\ OI = R \cos \widehat{A''ON}. \end{cases}$$

Les mesures d'angles géométriques $\widehat{A''ON'}$, $\widehat{A''OC}$, et $\widehat{A''ON}$ sont toutes comprises entre 0 et $\pi/2$, et l'on sait par hypothèse que

$$OJ \geq OA' \geq OI. \quad (2)$$

La fonction cosinus étant décroissante sur $[0, \pi/2]$, (1) et (2) entraînent

$$\widehat{A''ON'} \leq \widehat{A''OC} \leq \widehat{A''ON}.$$

Il suffit de remarquer que

$$\begin{cases} JN' = R \sin \widehat{A''ON'} \\ A'C = R \sin \widehat{A''OC} \\ IN = R \sin \widehat{A''ON} \end{cases}$$

et de rappeler que la fonction sinus est croissante sur $[0, \pi/2]$ pour obtenir

$$JN' \leq A'C \leq IN$$

puis $M'N' \leq BC \leq MN$ en multipliant tous les membres des inégalités précédentes par 2.

II.3.1. Le cercle $\mathcal{C}$ est circonscrit au triangle ATS, donc la formule des sinus ([2], Th. 191) donne :

$$\frac{AS}{\sin\theta} = 2R$$

quel que soit le cas de figure envisagé. Ainsi

$$AS = 2R\sin\theta \quad \text{et} \quad AK = R\sin\theta.$$

Remarques : α) $\theta = \pi/2$ si et seulement si le triangle ATS est rectangle en T, ce qui impose d'avoir $S = A''$ et $AS = AA'' = 2R$. C'est bien ce qu'on retrouve lorsqu'on applique la formule générale $AS = 2R\sin\theta$ avec $\theta = \pi/2$.

β) Les affirmations des deux questions qui suivent seront démontrées grâce à la formule $AS = 2R\sin\theta$ mais se comprennent très bien quand on observe les figures obtenues en faisant varier θ, en les dessinant et en les imaginant, ou en les dessinant une fois pour toutes dans un logiciel de géométrie dynamique comme Geogebra©.

II.3.2. On utilise la croissance de la fonction sinus sur $[0, \pi/2]$:

$$\theta < \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad AS = 2R\,\sin\theta < 2R\,\sin\frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad AS < R\sqrt{3} = L.$$

II.3.3. On utilise la décroissance de la fonction sinus sur $[\pi/2, \pi]$:

$$\theta > \frac{2\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad AS = 2R\,\sin\theta < 2R\,\sin\frac{2\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad AS < R\sqrt{3} = L.$$

II.4.1. La distance entre les centres D et O des deux cercles $\mathcal{C}$ et Γ est R. Ces cercles étant de rayons respectifs ρ et R, ils se couperont en deux points distincts si et seulement si $|\rho - R| < R < \rho + R$, autrement dit si et seulement si $\rho < 2R$. Cette dernière inégalité stricte est vérifiée puisque l'on sait qu'une corde d'un cercle différente d'un diamètre est toujours de longueur strictement inférieure au diamètre de ce cercle.

Remarques : α) On utilise un résultat de cours qui est à connaître pour l'écrit et pour les oraux des concours. La preuve de ce résultat est à savoir aussi ! Il s'agit du Théorème suivant :

> **Théorème** {[2], Th. 196 ou [4], Th. 90} : Soient $\mathcal{C} = \mathcal{C}(O, r)$ et $\mathcal{C}' = \mathcal{C}(O', r')$ deux cercles de centres distincts O, O' et de rayons strictement positifs r et r'. Soit $d = OO'$. Alors $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont sécants si et seulement si $|r - r'| \leq d \leq r + r'$. Plus précisément $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ est une paire si les deux inégalités sont strictes, un singleton dans le cas contraire.

On pourra réviser les positions relatives d'une droite et d'un cercle, ou de deux cercles, et s'entraîner à répondre à des questions du jury, en travaillant la leçon d'oral 1 sur le cercle traitée au chapitre 7 de [4].

β) On a admis que toute corde différente d'un diamètre est de longueur strictement inférieure au diamètre de ce cercle. De façon plus générale, on peut montrer que tout segment inclus dans un disque fermé est de longueur inférieure au diamètre du disque.
Vérifions ce dernier résultat. Si M et N sont deux points d'un disque fermé $\mathcal{D}$ de diamètre d, le segment $[MN]$ est inclus dans $\mathcal{D}$ (car $\mathcal{D}$ est convexe). Il suffit de prolonger $[MN]$ pour obtenir deux points U et V du bord $\mathcal{C}$ de $\mathcal{D}$ tels que $[MN] \subset [UV]$ (FIG. 7.4).
Notons B le point diamétralement opposé à U sur le cercle $\mathcal{C}$.

- Si $V = B$, $MN \leq UV = d$.

- Si $V \neq B$, le triangle UVB est rectangle en V. Comme la longueur d'un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle est toujours strictement inférieure à celle de l'hypoténuse (le prouver en utilisant, par exemple, le Théorème de Pythagore), $UV < UB$, donc $MN \leq UV < UB$.

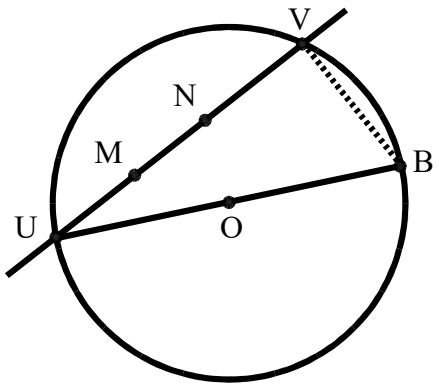


FIG. 7.4 – $MN \leq UB$

II.4.2. La droite (OD) relie les deux centres O et D des cercles $\mathcal{C}$ et Γ. C'est

donc un axe de symétrie de $\mathcal{C}$ et de Γ. Si s désigne la réflexion de base (OD), on aura donc

$$s\left(\{A,F\}\right) = s\left(\mathcal{C}\cap\Gamma\right) = s\left(\mathcal{C}\right)\cap s\left(\Gamma\right) = \mathcal{C}\cap\Gamma = \{A,F\},$$

et s conserve la paire $\{A,F\}$.
Le point A n'appartient pas à (OD) (sinon le symétrique F' de F par rapport à (OD) serait aussi dans l'intersection $\mathcal{C}\cap\Gamma$ qui contiendrait au moins trois points : A, F et F', ce qui est impossible !) donc $s\left(A\right) = F$ et (OD) est la médiatrice de $[AF]$.

II.4.3. Le point A appartient au cercle de diamètre $[DD']$, donc le triangle ADD' est rectangle en A. Le Théorème de Pythagore donne :

$$AD'^2 = DD'^2 - AD^2 = 4R^2 - \rho^2.$$

L'aire $\mathcal{A}_{ADD'}$ du triangle ADD' sera :

$$\mathcal{A}_{ADD'} = \frac{AD\times AD'^2}{2} = \frac{\rho}{2}\sqrt{4R^2-\rho^2}.$$

II.4.4. Comme (OD) est la médiatrice de $[AF]$, G est le milieu de $[AF]$ et (AF) est la hauteur issue de A du triangle ADD'. Donc $AF = 2\,AG$ et

$$\mathcal{A}_{ADD'} = \frac{DD'\times AG}{2} = R\times AG.$$

Par suite

$$AG = \frac{\mathcal{A}_{ADD'}}{R} = \frac{\rho}{2R}\sqrt{4R^2-\rho^2}$$

et

$$\boxed{AF = \frac{\rho}{R}\sqrt{4R^2-\rho^2}.}$$

II.4.5. Comme $x\in]0,2\pi[$ est positif, l'inéquation $x\sqrt{4R^2-x^2}\geq R^2\sqrt{3}$ équivaut à

$$x^2\left(4R^2-x^2\right)\geq 3R^4$$

ou encore l'inéquation bicarrée

$$x^4 - 4R^2x^2 + 3R^4 \leq 0. \quad (*)$$

Le discriminant réduit du trinôme en $X = x^2$ est $\Delta' = 4R^4 - 3R^4 = R^4$, donc x^2 est solution de $(*)$ si, et seulement si, il est entre les racines $2R^2\pm R^2$ du trinôme, c'est-à-dire $x^2\in\left[R^2,3R^2\right]$. Finalement, x est solution de l'inéquation proposée si et seulement si $x\in[R,R\sqrt{3}]$.

II.4.6. D'après les questions précédentes,

$$\begin{aligned}
\rho \in \mathcal{E} &\Leftrightarrow AF \geq L \\
&\Leftrightarrow \frac{\rho}{R}\sqrt{4R^2-\rho^2} \geq L = R\sqrt{3} \\
&\Leftrightarrow \rho\sqrt{4R^2-\rho^2} \geq R^2\sqrt{3} \\
&\Leftrightarrow \rho \in [R, R\sqrt{3}].
\end{aligned}$$

II.5.1. Le domaine grisé est l'intersection du disque de frontière $\mathcal{C}$ et du secteur angulaire saillant $[\widehat{BAC}]$. Un point E appartient à ce domaine si et seulement si E' appartient à l'arc de cercle $\overset{\frown}{BC}$ du cercle $\mathcal{C}$ ne contenant pas le point A, ce qui équivaut à $AE' \geq L$ d'après les questions II.1.2 et II.1.3.

II.5.2. Soient :

• $\mathcal{A}_g$ l'aire de la partie grisée,

• $\mathcal{A}' = \pi R^2/3$ l'aire de l'intersection du disque et du secteur angulaire saillant $[\widehat{BOC}]$ (un tiers de disque),

• $\mathcal{A}_{ABC}$ et $\mathcal{A}_{OBC}$ les aires des triangles ABC et OBC.

On a

$$\mathcal{A}_g = \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}' - \mathcal{A}_{OBC} = \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}' - \frac{\mathcal{A}_{ABC}}{3} = \frac{2}{3}\mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}'.$$

Comme

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\left(L \times L\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}L^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(R\sqrt{3})^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2,$$

on trouve

$$\boxed{\mathcal{A}_g = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}\right)R^2.}$$

Partie III
Le paradoxe de Joseph Bertrand

III.1. D'après la question II.1, un point P du cercle vérifie $AP \geq L$ si, et seulement si, il appartient à l'arc de cercle d'extrémités B et C ne contenant pas A. Comme cet arc mesure le tiers de la circonférence du cercle, la probabilité cherchée sera $p_1 = 1/3$.

III.2. Si on se limite à choisir I sur le segment $[OA'']$, la question II.2 nous montre que la corde $[MN]$ est de longueur $\geq L$ si et seulement si $I \in [OA']$ (je reprends ici les hypothèses et notations de la question II.2).
Par symétrie, si A'_0 désigne le symétrique de A' par rapport à O, on peut en déduire que, si I est choisi sur le diamètre $[AA'']$, alors $[MN]$ est de longueur supérieure à L si et seulement si $I \in [A'_0A']$. Comme $A'_0A' = 2OA' = R$, la probabilité cherchée est :

$$p_2 = \frac{A'_0A'}{AA''} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}.$$

III.3. Le contexte est maintenant celui de la question II.3 où l'on a vu montré l'implication :

$$\left(\theta < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \theta > \frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow AS < L.$$

En procédant comme en II.3.2, on montrerait aussi l'implication :

$$\left(\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow AS \geq L,$$

de sorte que l'on ait $AS \geq L$ si et seulement si $\dfrac{\pi}{3} \leq \theta \leq \dfrac{2\pi}{3}$. La probabilité cherchée est alors :

$$p_3 = \frac{1}{\pi - 0}\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

III.4. D'après la question II.4, $AF \geq L$ équivaut à $\rho \in [R, R\sqrt{3}]$, donc la probabilité devient :

$$p_4 = \frac{R\sqrt{3} - R}{2R - 0} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \simeq 0,366.$$

III.5. D'après II.5, la probabilité cherchée est :

$$p_5 = \frac{\text{aire grisée}}{\text{aire du disque}} = \frac{\mathcal{A}_g}{\pi R^2} = \frac{\sqrt{3}}{\pi 2} + \frac{1}{3} \simeq 0,609,$$

soit presque le double de p_4.

Problème 2

Etude d'une courbe plane définie par une équation implicite

Partie I : Définition de la fonction f

I.1. Un point de coordonnées $(0, y)$ appartient à la courbe Γ si et seulement si $y^3 - e^0 = 0$, ce qui équivaut à $y = 1$. Le seul point de Γ d'abscisse 0 est donc le point de coordonnées $(0, 1)$.

I.2. Si $M(x, 0)$ appartient à Γ, alors $-e^x = 0$, ce qui est impossible. La courbe Γ n'intercepte donc pas l'axe des x.

I.3.1. $\varphi_2(t) = 0$ si et seulement si le point de coordonnées $(2, t)$ appartient à Γ.

I.3.2. φ_2 est une fonction polynomiale de degré 3, donc c'est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa dérivée est la fonction $t \mapsto \varphi_2'(t) = 3t^2 + 2$.

I.3.3. $\varphi_2'(t)$ est strictement positive quel que soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction φ_2 est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, et le tableau de variations de φ_2 est facile à compléter :

t	0		$+\infty$
$\varphi_2'(t)$	$+$		
$\varphi_2(t)$	$-e^2$	$\nearrow$	$+\infty$

I.3.4. φ_2 est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, prend une valeur strictement négative en 0, et tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$. On en déduit que l'équation $\varphi_2(t) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$.

I.3.5. Une calculatrice donne

$$\varphi_2\left(\frac{3}{2}\right) \simeq -1,014 \quad \text{et} \quad \varphi_2\left(\frac{7}{4}\right) \simeq 1,470.$$

Le Théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue φ_2 sur $[3/2, 7/4]$ montre que 0, appartenant à l'intervalle $[\varphi_2(3/2), \varphi_2(7/4)]$, a un antécédent dans $]3/2, 7/4[$. Ce ne peut être que y_2, donc

$$\frac{3}{2} < y_2 < \frac{7}{4}.$$

I.4.1. φ_{-2} est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\varphi_{-2}'(t) = 3t^2 - 2$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$. φ_{-2}' s'annule en $\pm\sqrt{2/3}$ et reste positive à l'extérieur des racines de $3t^2 - 2$, négative entre celles-ci. Le tableau de variations de φ_{-2} sur $\mathbb{R}_+^*$ s'en déduit :

t	0		$\sqrt{2/3}$		$+\infty$
$\varphi_{-2}'(t)$	$-$		0	$+$	
$\varphi_{-2}(t)$	$-e^{-2}$	$\searrow$	$\simeq -1,22$	$\nearrow$	$+\infty$

Les croissances et décroissances de φ_{-2} signalées dans ce tableau sont strictes !

I.4.2. Il suffit d'observer le tableau de variations de φ_{-2} et de se rappeler que φ_{-2} est continue pour pouvoir affirmer que :

- φ_{-2} ne peut pas s'annuler entre 0 et $\sqrt{2/3}$,

- φ_{-2}, strictement croissante sur $[\sqrt{2/3}, +\infty[$, telle que $\varphi_{-2}(t) < 0$ et $\lim_{t\to+\infty} \varphi_{-2}(t) = +\infty$, s'annule en un et un seul point de $[\sqrt{2/3}, +\infty[$.

I.4.3. Une calculatrice donne

$$\begin{cases} \varphi_{-2}(1,445) \simeq -8,139 \times 10^{-3} \\ \varphi_{-2}(1,455) \simeq \ \ 3,494 \times 10^{-2} \end{cases}$$

et le Théorème des valeurs intermédiaires donne $1,445 \leq y_{-2} \leq 1,455$, c'est-à-dire $1,45 - 5.10^{-3} \leq y_{-2} \leq 1,45 + 5.10^{-3}$, ou encore

$$|y_{-2} - 1,45| \leq 5.10^{-3}.$$

Cela prouve que $1,45$ est une valeur approchée à 5.10^{-3} près de y_{-2}.

I.5.1. φ_x est une fonction polynomiale en t, donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ en entier, et en particulier sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi_x'(t) = 3t^2 + x$.

I.5.2. ▶ Si $x \geq 0$, $\varphi_x'(t) = 3t^2 + x$ est strictement positif quel que soit $t \in \mathbb{R}_+^*$, donc φ_x est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Le tableau de variations de φ_x est

t	0		$+\infty$
$\varphi_x'(t)$	$+$		
$\varphi_x(t)$	$-e^x$	$\nearrow$	$+\infty$

▶ Si $x < 0$, le trinôme $\varphi_x'(t) = 3t^2 + x$ s'annule lorsque $t = \pm\sqrt{-x/3}$, est négatif à l'intérieur des racines et positif à l'extérieur. Le tableau de variations de φ_x sur $\mathbb{R}_+^*$ devient

t	0		$\sqrt{-x/3}$		$+\infty$
$\varphi_x'(t)$	$-$		0	$+$	
$\varphi_x(t)$	$-e^x$	$\searrow$	$\varphi_x(\sqrt{-x/3})$	$\nearrow$	$+\infty$

I.5.3. La continuité de φ_x et les tableaux de variations précédents montrent qu'il existe un et un seul réel y_x strictement positif tel que $\varphi_x(y_x) = 0$, quelle que soit la valeur de x.

Remarque : Lorsque $x < 0$, on constate que $\sqrt{-x/3} < y_x$.

I.6.1. ▶ Si $x \geq 0$, alors $3[f(x)]^2 + x$ est strictement positif comme la somme de $3[f(x)]^2$, strictement positif (puisque $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+^*$) et x positif.

► Si $x < 0$, la remarque faite à la question I.5.3 donne

$$\sqrt{-x/3} < y_x = f(x).$$

Il suffit d'élever au carré pour obtenir $3[f(x)]^2 + x > 0$.

I.6.2. ► Si $x \geq 0$, le tableau de variations de φ_x obtenu en I.5.2 montre que :

$$(\Diamond) \quad \begin{cases} t > f(x) \Rightarrow \varphi_x(t) > 0 \\ t < f(x) \Rightarrow \varphi_x(t) < 0 \\ t = f(x) \Rightarrow \varphi_x(t) = 0. \end{cases}$$

Toutes ces implications sont donc des équivalences, et les expressions t^3+xt-e^x et $t - f(x)$ seront de même signe et s'annuleront simultanément.

► Si $x < 0$, le tableau de variations de φ_x obtenu en I.5.2 dans ce cas mène encore à $(\Diamond)$, et aux mêmes conclusions.

I.7.1. On a $[f(0)]^3 - e^0 = 0$ et $f(0) > 0$, donc $f(0) = 1$.

I.7.2. • D'après I.3.5 :

$$\frac{3}{2} < f(2) < \frac{7}{4}$$

donc $1,5 < f(2) < 1,625$. Cela ne permet pas immédiatement de donner une valeur approchée de $f(2)$ à 10^{-2} près. Il faut aller plus loin et procéder par dichotomie ou par balayage.
Le plus simple est de procéder par balayage entre $1,50$ et $1,62$ avec un pas de 10^{-2}. On calcule $\varphi_2(1,50)$, $\varphi_2(1,51)$, ..., $\varphi_2(1,62)$ et on observe les signes obtenus.
La calculatrice donne $\varphi_2(1,60) = -0,093 < 0$ et $\varphi_2(1,61) = 0,00422 > 0$, de sorte que

$$1,60 < f(2) < 1,61$$

et que l'on puisse affirmer que $1,60$ est la valeur approchée par défaut à 10^{-2} près de $f(2)$.

• D'après I.4.3 : $1,445 \leq y_{-2} = f(-2) \leq 1,455$. Une calculatrice donne

$$\begin{cases} \varphi_{-2}(1,44) \simeq -2,9351 \times 10^{-2} \\ \varphi_{-2}(1,45) \simeq 1,3290 \times 10^{-2} \end{cases}$$

de sorte que $1,44 < f(-2) < 1,45$, et que $1,44$ soit la valeur approchée par défaut à 10^{-2} près de $f(-2)$.

Partie II : Etude des variations de la fonction f

II.1.1. Il suffit de dériver les deux membres de (1) pour obtenir

$$3[f(x)]^2 f'(x) + f(x) + xf'(x) - e^x = 0$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'où $f'(x)\left(3[f(x)]^2 + x\right) = e^x - f(x)$. Comme $3[f(x)]^2 + x$ ne s'annule jamais (question I.6.1), on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{e^x - f(x)}{3[f(x)]^2 + x}.$$

Remarque : La dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ nous est donnée par le théorème des fonctions implicites. L'énoncé de ce théorème fait partie du programme du CAPES externe et de l'agrégation (sans que l'on demande de retenir une quelconque preuve de ce résultat difficile), et il est bon de profiter de cette question pour nous le remémorer :

> **Théorème des fonctions implicites** : Si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $(x, y) \mapsto f(x, y)$ est une application de classe C^k (où $k \geq 1$) d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, et si $A = (a_1, a_2)$ est un point de Ω tel que
>
> $$f(a_1, a_2) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) \neq 0,$$
>
> alors il existe alors un voisinage ouvert U de a_1, un voisinage ouvert V de a_2, et une application $\varphi : U \to V$ de classe C^k telle que :
>
> 1) $\forall (x, y) \in U \times V \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$,
> 2) $\forall (x, y) \in U \times V \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$,
> 3) $\forall x \in U \quad \varphi'(x) = -\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}^{(x,y)}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}^{(x,y)}}$.

Ici $g(x, y) = y^3 + xy - e^x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, et tout (x, y) appartenant à Γ et d'ordonnée positive vérifie $y^3 + xy - e^x = 0$ et ne peut pas annuler la dérivée partielle :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 + x.$$

En effet,

$$\begin{cases} y^3 + xy - e^x = 0 \\ 3y^2 + x = 0 \end{cases}$$

entraîne $2y^3 = -e^x < 0$, ce qui n'est pas ! On peut donc appliquer le théorème rappelé ci-dessus et exprimer localement y comme une fonction de x, en utilisant une fonction de classe C^∞. Le résultat admis de l'énoncé est maintenant démontré.
Pour réviser le minimum à connaître sur le Théorème des fonctions implicites, les candidats au CAPES externe et à l'agrégation n'hésiteront pas à se reporter au petit résumé que j'ai rédigé à la Section 15.4.1 de [4].

II.1.2. Dans l'expression

$$f'(x) = \frac{e^x - f(x)}{3[f(x)]^2 + x},$$

le dénominateur est toujours positif (I.6.1) donc le signe de $f'(x)$ est celui de $e^x - f(x)$, qui est le même que $e^{3x} + xe^x - e^x$ d'après la question I.6.2. Comme cette dernière expression s'écrit $e^x\left(e^{2x} + x - 1\right)$, et comme e^x reste strictement positif quand x décrit $\mathbb{R}$, le signe de $f'(x)$ sera celui de $e^{2x} + x - 1$.

II.1.3. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$, et le nombre-dérivé $u'(x) = 2e^{2x} + 1$ est strictement positif quel que soit x. On a donc une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et le tableau de variations s'en déduit :

x	0		$+\infty$
$u'(x)$	$+$		
$u(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

II.1.4. Comme $u(0) = 0$, le tableau de variations de u montre que $u(x)$ est strictement positif (resp. négatif) si $x > 0$ (resp. $x < 0$). Par suite (et d'après II.1.2), $f'(x)$ sera aussi strictement positif (resp. négatif) si $x > 0$ (resp. $x < 0$).
Et bien sûr :

$$f'(0) = \frac{e^0 - f(0)}{3[f(0)]^2} = 0$$

puisque $f(0) = 1$.

II.2.1. On a $3[f(x)]^2 > -x$ quel que soit le réel x, d'après I.6.1. Comme $\lim_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$, on en déduit $\lim_{x\to-\infty}[f(x)]^2 = +\infty$.
Pour tout $B \in \mathbb{R}_+$ il existe donc $A \in \mathbb{R}_-$ tel que

$$x < A \quad \Rightarrow \quad [f(x)]^2 > B^2.$$

Comme $f(x)$ reste positif quel que soit x, on aura tout aussi bien

$$\forall B \in \mathbb{R}_+ \quad \exists A \in \mathbb{R}_- \quad x < A \quad \Rightarrow \quad f(x) > B$$

donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

II.2.2. C'est bien sûr l'exponentielle qui impose sa loi à toute fonction polynomiale :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(e^x - x^3 - x^2\right) = +\infty. \quad (\natural)$$

Cela se traduit en écrivant :

$$\forall B \in \mathbb{R}_+ \quad \exists A \in \mathbb{R}_+^* \quad x \geq A \;\Rightarrow\; e^x - x^3 - x^2 \geq B.$$

Si l'on choisit $B = 0$, on obtient :

$$\exists A \in \mathbb{R}_+^* \quad x \geq A \;\Rightarrow\; e^x \geq .x^3 + x^2.$$

Remarque : On démontre $(\natural)$ en écrivant

$$e^x - x^3 - x^2 = e^x \left(1 - \frac{x^3}{e^x} - \frac{x^2}{e^x}\right)$$

puis en appliquant les résultats classiques concernant les produits des limites : ici $\lim_{x\to+\infty} e^x$ et $\lim_{x\to+\infty}(1 - \frac{x^3}{e^x} - \frac{x^2}{e^x}) = 1$ de sorte que l'on obtienne $\lim_{x\to+\infty} \left(e^x - x^3 - x^2\right) = +\infty$.
Si $n \in \mathbb{N}$, on démontre que $\lim_{x\to+\infty} (x^n/e^x) = 0$ en cherchant la limite de $\ln(x^n/e^x)$.

II.2.3. Si $x \geq A$, x est strictement positif et I.6.2 montre que $x - f(x)$ est du signe de $x^3 + x^2 - e^x$, donc négatif d'après la question précédente. Ainsi $x \geq A$ entraîne $f(x) \geq x$.

II.2.4. Puisque $f(x) \geq x$ dès que $x \geq A$, et que $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, on obtient $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

II.3. En conclusion :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Partie III : Etude d'une courbe asymptote à la courbe Γ_1

III.1.1. Comme $f(x)$ ne s'annule jamais, (1) s'écrit

$$f(x)^2 = \frac{e^x}{f(x)} - x.$$

Comme $f(x)$ existe quel que soit x, on est assuré d'avoir $\frac{e^x}{f(x)} - x \geq 0$ et

$$f(x) = \pm\sqrt{\frac{e^x}{f(x)} - x}.$$

Il suffit de rappeler que f est positive pour obtenir la formule annoncée.

III.1.2. Pour tout $x < 0$,

$$f(x) - \sqrt{-x} = \sqrt{\frac{e^x}{f(x)} - x} - \sqrt{-x} = \frac{\frac{e^x}{f(x)}}{\sqrt{\frac{e^x}{f(x)} - x} + \sqrt{-x}}. \quad (\flat)$$

Comme $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, on a $\lim_{x\to-\infty} e^x/f(x) = 0$. Dans le quotient $(\flat)$ ci-dessus, le numérateur tend vers 0, et le dénominateur tend vers $+\infty$, donc le quotient tend vers 0, et $\lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - \sqrt{-x}\right) = 0$. Cela signifie que la courbe d'équation $y = \sqrt{-x}$ est asymptote à Γ_1 quand x tend vers $-\infty$.
Le numérateur et le dénominateur du quotient $(\flat)$ restant positifs lorsque x parcourt $\mathbb{R}^*_-$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*_- \quad f(x) - \sqrt{-x} \geq 0$$

et la courbe Γ_1 reste au-dessus de la courbe d'équation $y = \sqrt{-x}$ quand x décrit l'intervalle $\mathbb{R}^*_-$.

III.2. Sur la FIG. 7.5, on a représenté la courbe Γ et la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $x = -y^2$ qui contient la courbe asymptote d'équation $y = \sqrt{-x}$ qui nous intéresse. En regardant le tracé, on peut conjecturer que la partie de la parabole $\mathcal{P}$ située dans le demi-plan d'équation $y \leq 0$ est aussi asymptote à Γ_2.

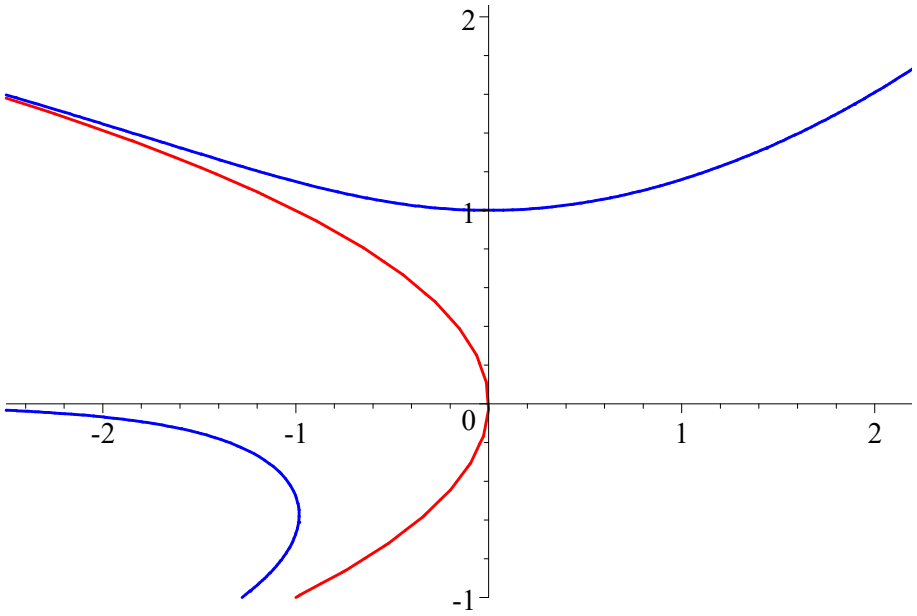


FIG. 7.5 – Courbe Γ et courbe asymptote de Γ_1

Chapitre 8

Bonus : 2 problèmes

En bonus, voici deux problèmes de concours de recrutement 2006 que l'on pourra travailler pour continuer l'entraînement. Les notions abordées dans ces problèmes sont toutes du programme de l'écrit du CAPES interne.

8.1 Inspecteur des impôts 2006

Il s'agit de l'épreuve 3 intitulée "Mathématiques & Statistiques" du concours national "Inspecteur-élève généraliste" interne et externe, session 2006. Il comporte quatre exercices sur des thèmes très variés : parties entières de x, matrices, statistiques, et calcul de probabilités.

8.1.1 Enoncé

Durée de l'épreuve : 3h. L'usage de la calculatrice est autorisé. Les résultats non justifiés par des explications mathématiques précises seront sans valeur.
Les parties I, II, III et IV sont indépendantes.

Partie I

Dans le plan $\mathcal{P}$ on considère une droite $\mathcal{D}$ sur laquelle on définit un repère normé $(O, \overrightarrow{i})$. On désigne par A_p $(p \in \mathbb{Z})$ le point d'abscisse p et par M le point d'abscisse x où x est un nombre réel. On définit l'application f qui, à l'abscisse de tout point M de $\mathcal{D}$, associe le produit des distances de M aux deux points A_p les plus proches.

1.a) Vérifier que, si $E(x)$ désigne la partie entière[1] de x, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = (x - E(x))(E(x) + 1 - x)$$

[1] Si x est un nombre réel, sa partie entière est le plus grand entier inférieur ou égal à x et vérifie : $x - 1 < E(x) \leq x$.

b) Montrer que f est 1-périodique.

c) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

d) Etudier les variations de f.

e) On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ complétant le repère $(O, \overrightarrow{i})$. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f dans le plan $\mathcal{P}$ muni du repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

2) On considère à présent la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = E(x+1) f(x).$$

a) Soit $p \in \mathbb{Z}$. Calculer $g(x)$ pour tout $x \in [p, p+1[$.

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de g sur $\mathbb{R}$.

c) Tracer la courbe $\mathcal{C}_g$ représentative de la fonction g dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

d) Calculer l'aire $\mathcal{A}_p$ du domaine compris entre $\mathcal{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = p$ et $x = p+1$.

e) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = \sum_{p=0}^{n} \mathcal{A}_p$. Calculer S_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie II

Dans l'anneau des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère les matrices A, I_n et P suivantes ;

$$A = \begin{pmatrix} a & a & \cdots & \cdots & a \\ 0 & 2a & a & \cdots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & na \end{pmatrix} \quad \text{où } a \in]0,1],$$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer, pour tout entier $k \in [1, n]$, le déterminant $\det(A - kaI_n)$.

2) Calculer P^{-1} et prouver que $A = P\Delta P^{-1}$ où Δ est une matrice diagonale à déterminer.

3) Calculer A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

4) Déterminer la limite suivante : $\lim_{p \to +\infty} A^p$.

Partie III

Dans la statistique d'un événement suffisamment rare dont les issues possibles sont les x_i, on a noté les effectifs n_i correspondants :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
n_i	229	325	257	119	50	17	2	1	0

1) Calculer la moyenne de cette distribution.

2) Est-il raisonnable de penser que cette distribution est approximativement de Poisson ? On calculera pour cela les effectifs théoriques de la loi de Poisson ayant la même moyenne m et le même effectif total $N = \sum_{i=1}^{8} n_i$.

3) Calculer l'écart-type σ de la distribution statistique. En déduire que la réponse faite à la question précédente est vraisemblable.

Partie IV

On dispose de nombreuses boules blanches, de nombreuses boules rouges et d'une urne contenant initialement 3 boules blanches et 7 boules rouges indiscernables au toucher. Un tirage consiste à tirer une boule de l'urne.
Si c'est une boule rouge, on la conserve, puis l'on remet une boule blanche dans l'urne. Par contre, si c'est une boule blanche, on la conserve, mais l'on ne remet pas de boule dans l'urne.
On procède ainsi à trois tirages successifs. Si les trois boules tirées successivement sont toutes de la même couleur, on entreprend alors de jeter un dé non pipé et l'on note le nombre de points fournis par ce dé. Par contre, si les trois boules tirées ne sont pas toutes de la même couleur, on jette deux dés non pipés et l'on totalise les points de chacun de ces deux dés.

1) Quelle est la probabilité de jeter un seul dé ?

2) Quelle est la probabilité d'obtenir 4 ?

3) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

8.1.2 Solution

Partie I

1.a) Par définition $E(x) \leq x < E(x) + 1$. Si x n'est pas entier, les deux points d'abscisses entières les plus proches de M sont donc les points $A_{E(x)}$ et $A_{E(x)+1}$ d'abscisses respectives $E(x)$ et $E(x) + 1$. Les distances de M à $A_{E(x)}$ et $A_{E(x)+1}$ étant $MA_{E(x)} = x - E(x)$ et $MA_{E(x)+1} = (E(x) + 1) - x$, on obtient

$$f(x) = (x - E(x))(E(x) + 1 - x). \quad (*)$$

Si x est entier, il n'existe qu'un seul point d'abscisse entière le plus proche de M : c'est M lui-même. Quel que soit le second point d'abscisse entière que l'on choisisse (abscisse $x+1$ ou $x-1$), on obtient $f(x)=0$, et la formule $(*)$ reste vraie dans ce cas.

1.b) La fonction partie entière est 1-périodique, donc pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x+1) &= (x+1-E(x+1))(E(x+1)+1-(x+1)) \\ &= (x-E(x))(E(x)+1-x) = f(x), \end{aligned}$$

et f est 1-périodique.

Remarques : α) La périodicité de $E(x)$ provient de l'implication

$$E(x) \leq x < E(x)+1 \quad \Rightarrow \quad E(x)+1 \leq x+1 < E(x)+2$$

qui donne $E(x+1) = E(x)+1$.

β) Une solution plus longue mais néanmoins intéressante consiste à utiliser une translation. L'égalité $f(x+1) = f(x)$ est évidente si x est entier, puisque dans ce cas $M = A_x$, $f(x) = 0$, et comme $x+1$ est entier, le point N d'abscisse $x+1$ sera égal à A_{x+1}, et l'on aura encore $f(x+1) = 0 = f(x)$.
Si x n'est pas entier, notons A_p et A_{p+1} les points d'abscisses entières les plus proches de M (on a $p = E(x)$). Par définition : $f(x) = MA_p \times MA_{p+1}$.
Le point N d'abscisse $x+1$ est l'image de M par la translation $t_{\overrightarrow{i}}$ de vecteur $\overrightarrow{i}$.
Cette translation amène aussi A_p sur A_{p+1}, et A_{p+1} sur A_{p+2}. Comme elle conserve les distances, $MA_p = NA_{p+1}$ et $MA_{p+1} = NA_{p+2}$, et l'on obtient bien

$$f(x) = MA_p \times MA_{p+1} = NA_{p+1} \times NA_{p+2} = f(x+1).$$

1.c) Il suffit d'étudier f sur $[0,1[$ pour la connaître sur $\mathbb{R}$ tout entier.

$$\forall x \in [0,1[\qquad f(x) = x(1-x) = -x^2 + x.$$

f est donc dérivable (et donc continue) sur $]0,1[$, et aussi sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Sur cet intervalle, sa représentation graphique est un morceau de parabole tournant sa concavité vers le bas.
Si $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} x \in [p, p+1[\Rightarrow f(x) = (x-p)(p+1-x) \\ x \in [p-1, p[\Rightarrow f(x) = (x-p+1)(p-x). \end{cases}$$

Ainsi $\lim_{x\to p_+} f(x) = 0 = f(p) = \lim_{x\to p_-} f(x) = 0$. La fonction f est donc continue en p. Calculons les limites des taux d'accroissement à droite et à gauche en p :

$$\lim_{x\to p_+, x\neq 0} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} = \lim_{x\to p_+} \frac{(x-p)(p+1-x)}{x-p} = \lim_{x\to p_+} (p+1-x) = 1$$

et

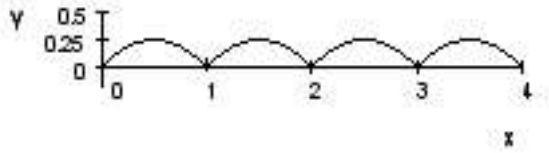
$$\lim_{x\to p_-, x\neq 0} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} = \lim_{x\to p_-} \frac{(x-p+1)(p-x)}{x-p} = \lim_{x\to p_-} (-x+p-1) = -1.$$

La fonction f n'est donc pas dérivable en p, mais admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche en ce point (et la courbe représentative de f admet une demi-tangente à droite et une demi-tangente à gauche en p).

1.d) Pour $x \in [0,1[$, $f'(x) = -2x+1$, donc f s'annule en $1/2$ et :

x	0		$1/2$		1
$f'(x)$	1	$+$	0	$-$	-1(limite à gauche)
$f(x)$	0	$\nearrow$	$1/4$	$\searrow$	0

1.e)



2.a) Si $x \in [p, p+1[$, $g(x) = E(x+1) f(x) = (p+1)(x-p)(p+1-x)$.

2.b) Sur chaque intervalle $[p, p+1[$, la fonction g étant le produit de f par la constante $p+1$, et f étant dérivable (et donc continue) sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, on peut affirmer que g est dérivable (et donc continue) sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.
En reprenant les calculs du 1.c),

$$\lim_{x\to p_+, x\neq 0} \frac{g(x)-g(p)}{x-p} = \lim_{x\to p_+} \frac{(p+1)(x-p)(p+1-x)}{x-p} = p+1$$

et

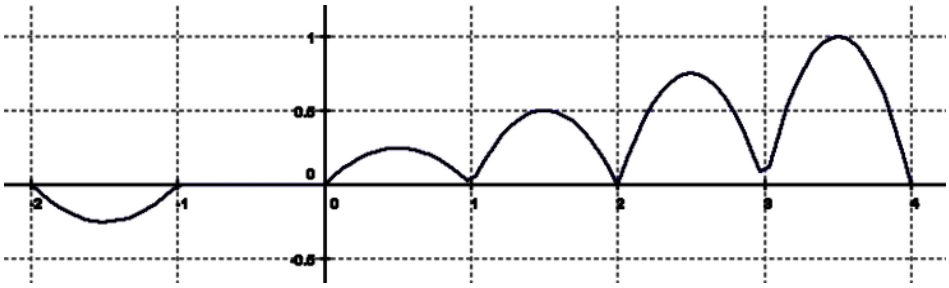
$$\lim_{x\to p_-, x\neq 0} \frac{g(x)-g(p)}{x-p} = \lim_{x\to p_-} \frac{p(x-p+1)(p-x)}{x-p} = -p.$$

Ainsi g est dérivable en p si et seulement si $p+1=-p$, i.e. $p=1/2$, valeur à rejeter car non entière. En conclusion g n'est dérivable en aucun point entier.

Remarque : Le tableau de variation de g se déduit de celui de f sur chacun des intervalles $[p, p+1[$: même sens de variation si $p+1>0$, sens de variation différents si $p+1<0$.

2.c) Le lecteur construira la courbe $\mathcal{C}_g$ dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Un grapheur nous donne l'allure suivante (en laissant une imperfection en

$x = 3$) :



2.d)

$$\mathcal{A}_p = \int_p^{p+1} g\,(x)\ dx = (p+1)\int_p^{p+1} (x-p)(p+1-x)\,dx$$

En faisant le changement de variables $t = x - p$,

$$\mathcal{A}_p = (p+1)\int_0^1 t(1-t)\,dt = (p+1)\left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{p+1}{6}.$$

2.e) Il faut calculer $S_n = \frac{1}{6}\sum_{p=0}^{n}(p+1)$. On reconnaît la somme des $n+1$ premiers termes d'une progression arithmétique de raison 1 et de premier terme 1. D'où

$$S_n = \frac{1}{6} \times \frac{(n+1)\,(n+2)}{2} = \frac{(n+1)\,(n+2)}{12}.$$

Partie II

1) La matrice

$$A - kaI_n = \begin{pmatrix} a-ka & a & \cdots & \cdots & a \\ 0 & 2a-ka & a & \cdots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & na-ka \end{pmatrix}$$

est triangulaire supérieure. Son déterminant est donc égal au produit de tous les coefficients situés sur la diagonale principale :

$$\begin{aligned} \det(A - kaI_n) &= (a-ka)\,(2a-ka)\,...\,(na-ka) \\ &= (1-k)\,(2-k)\,...\,(n-k)\,a^n. \end{aligned}$$

Comme k est un entier compris entre 1 et n, l'un des termes du produit est nul, et $\det(A - kaI_n) = 0$.

2) • Calculer P^{-1} revient à résoudre le système triangulaire (S) suivant d'inconnues x_1, ..., x_n et de paramètres m_1, ..., m_n :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rl} x_1 + x_2 + ... + x_n & = m_1 \\ x_2 + ... + x_n & = m_2 \\ ..... & = \ ... \\ x_{n-1} + x_n & = m_{n-1} \\ x_n & = m_n. \end{array} \right.$$

On procède de proche en proche.
D'abord $x_n = m_n$, puis $x_{n-1} = m_{n-1} - x_n = m_{n-1} - m_n$, puis encore

$$x_{n-2} = m_{n-2} - (x_{n-1} + x_n) = m_{n-2} - m_{n-1}.$$

Il est fort probable que l'on ait $x_{n-k} = m_{n-k} - m_{n-k+1}$ pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$, et où l'on pose commodément $m_{n+1} = 0$. Vérifions donc que la propriété

$$H(k) : \quad x_{n-k} = m_{n-k} - m_{n-k+1}$$

est vraie pour tout $k \in \{0, ..., n-1\}$ en raisonnant par récurrence sur k. La propriété $H(0)$ est triviale. Si l'on suppose les propriétés $H(0)$, $H(1)$, ..., $H(k)$ toutes vraies jusqu'au rang k, on obtient au rang $k+1$:

$$x_{n-k-1} + x_{n-k} + ... + x_n = m_{n-k-1}$$

soit $x_{n-k-1} = m_{n-k-1} - (x_{n-k} + ... + x_n)$. Comme

$$\begin{array}{rcl} x_{n-k} + ... + x_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} x_{n-i} & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{k} (m_{n-i} - m_{n-i+1}) \\ & = & m_n + (m_{n-1} - m_n) + ... + (m_{n-k} - m_{n-k+1}) \\ & = & m_{n-k}, \end{array}$$

on obtient bien $x_{n-k-1} = m_{n-k-1} - m_{n-k}$, et la récurrence aboutit. Finalement

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} \quad \text{avec } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• Un calcul direct donne :

$$AP = \begin{pmatrix} a & a & \cdots & \cdots & a \\ 0 & 2a & a & \cdots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & na \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & 2a & \cdots & \cdots & na \\ 0 & 2a & 3a & \cdots & na \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (n-1)a & na \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & na \end{pmatrix}$$

puis

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 2a & \cdots & \cdots & na \\ 0 & 2a & 3a & \cdots & na \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (n-1)a & na \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & na \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (n-1)a & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & na \end{pmatrix}.$$

Ainsi $P^{-1}AP = \Delta$ où Δ est la matrice diagonale dont les termes diagonaux (sur la diagonale principale) sont a, $2a$, ..., na.

Remarques : α) Travailler avec des matrices de taille n nous oblige à mettre de nombreux points de suspension. On peut vérifier que les calculs précédents sont bien justes lorsque $n = 3$, par exemple. On obtient :

$$P^{-1}P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$AP = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & 2a & a \\ 0 & 0 & 3a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a & 3a \\ 0 & 2a & 3a \\ 0 & 0 & 3a \end{pmatrix},$$

et enfin :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 2a & 3a \\ 0 & 2a & 3a \\ 0 & 0 & 3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 3a \end{pmatrix}.$$

β) Il n'est pas facile de calculer ces produits de matrices "directement". Une autre solution, plus lourde mais très efficace, consiste à écrire in extenso les coefficients des matrices que l'on doit calculer, à l'aide de sommes. Un exemple de tel travail est donné dans la réponse à la question 3), pour le calcul de $A^p = P\Delta^p P^{-1}$.

γ) La matrice diagonale Δ ne peut être que celle que l'on a trouvé ! Pour le voir, il faut rappeler le résultat de cours suivant :

Théorème : Une matrice carrée M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui admet n valeurs propres réelles distinctes λ_1, ..., λ_n, est diagonalisable, autrement dit il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, où l'on pose

$$\text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

La question 1) montre que notre matrice A admet les n réels distincts a, $2a$, ..., na pour valeurs propres. On peut donc affirmer l'existence d'une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = \text{diag}(a, 2a, ..., na)$. Quant à savoir qui est P, le théorème ne nous le dit pas...Il faudrait chercher une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A...

3) Si $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^p = \left(P\Delta P^{-1}\right)^p &= \left(P\Delta P^{-1}\right)\left(P\Delta P^{-1}\right)...\left(P\Delta P^{-1}\right) \\ &= P\Delta\left(P^{-1}P\right)\Delta\left(P^{-1}P\right)...\Delta\left(P^{-1}P\right)\Delta P^{-1} \\ &= P\Delta^p P^{-1}. \end{aligned}$$

Le calcul de Δ^p est facile :

$$\Delta^p = \begin{pmatrix} a^p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & (2a)^p & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & ((n-1)a)^p & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & (na)^p \end{pmatrix}.$$

On calcule ensuite $A^p = P\Delta^p P^{-1}$. La multiplication n'étant pas aisée à faire, nous emploierons les grands moyens. Notons

$$\Delta^p = (d_{ij}) \ ; \quad P = (p_{ij}) \ ; \quad P^{-1} = (q_{ij})$$

avec

$$d_{ij} = (ia)^p \delta_{ij} \ ; \quad p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \geq i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad ; \quad q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } j = i+1 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker (par dféfinition δ_{ij} vaut 1 si $i = j$, et 0 dans le cas contraire). Dans ce cas, on a $\Delta^p P^{-1} = (a_{ij})$ avec

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik} q_{kj} = d_{ii} q_{ij} = (ia)^p q_{ij} = \begin{cases} (ia)^p & \text{si } i = j \\ -(ia)^p & \text{si } j = i+1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puis $A^p = P\Delta^p P^{-1} = P\left(\Delta^p P^{-1}\right) = (p_{ij})\,(a_{ij}) := (b_{ij})$ avec

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} a_{kj} = \sum_{k=i}^{n} a_{kj} = \begin{cases} a_{j-1,j} + a_{jj} & \text{si } i < j \\ a_{jj} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i > j. \end{cases}$$

Ainsi

$$b_{ij} = \begin{cases} -\left((j-1)\,a\right)^p + (ja)^p & \text{si } i < j \\ (ja)^p & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i > j. \end{cases}$$

La matrice cherchée A^p est de terme général b_{ij} obtenu ci-dessus.

Remarques, conseils et méthodologie :

α) Pour calculer A^p, nous avons utilisé la définition classique d'un produit de matrice. Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux matrices carrées de taille n dont les coefficients généraux sont a_{ij} et b_{ij}, pour $i =$ indice de ligne et $j =$ indice de colonne, le produit de A par B, noté AB ou $A \times B$, est la matrice $C = (c_{ij})$ de terme général

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

La formule est à retenir ! Elle signifie que l'on obtient le coefficient c_{ij}, situé à la i -ème ligne et j-ième colonne, en "multipliant la i -ème ligne de A par la j-ième colonne de B". Le produit matriciel s'effectue donc en "multipliant des

lignes par des colonnes" (c'est une façon de parler qui permet de bien retenir la formule !).

β) **Conseil stratégique pour le concours** : A-t-on vraiment le temps de proposer cette solution durant une épreuve en temps limité ? Ce n'est pas sûr :

> *Tout dépend de son entraînement sur les matrices ET des points que l'on peut gagner en traitant en priorité les autres questions.*

Je pense que beaucoup de candidats ont été bloqués par cet exercice de calcul matriciel, mais ont tout de même réussi l'épreuve en traitant les autres exercices du sujet.
Bref : on fera attention à ne pas rester bloqué longtemps sur une question (plus de cinq minutes, si l'on ne trouve pas de méthode probable de résolution) ... circulez, gagnez des points à chaque instant et là où vous les trouvez, quitte à revenir sur les questions restantes à la fin de l'épreuve après être certain d'avoir engrangé tous les points qui étaient réellement à portée.
Il faut surtout ne jamais sortir de l'épreuve en lisant la suite du problème, et en s'écriant par exemple : "Mais j'aurais pu répondre facilement à cette question... au lieu d'être bloqué à tel endroit pendant plus d'une demi-heure !".

γ) Vérifions la justesse de la formule donnant A^p en traitant "à la main" le cas où $p = 3$. On a

$$\Delta^p P^{-1} = \begin{pmatrix} a^p & 0 & 0 \\ 0 & (2a)^p & 0 \\ 0 & 0 & (3a)^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^p & -a^p & 0 \\ 0 & (2a)^p & -(2a)^p \\ 0 & 0 & (3a)^p \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned} A^p = P\left(\Delta^p P^{-1}\right) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^p & -a^p & 0 \\ 0 & (2a)^p & -(2a)^p \\ 0 & 0 & (3a)^p \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^p & -a^p + (2a)^p & -(2a)^p + (3a)^p \\ 0 & (2a)^p & -(2a)^p + (3a)^p \\ 0 & 0 & (3a)^p \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4) Comme $a \in]0, 1]$, $\lim_{p\to+\infty} a^p = 0$ si $0 < a < 1$, et $\lim_{p\to+\infty} a^p = 1$ si $a = 1$. Mais il y a un problème : les coefficients b_{ij} de A^p s'expriment en fonction de $(ja)^p$ avec $1 \leq j \leq n$.
Admettons que chercher la limite de A^p revienne à chercher la limite de Δ^p (cela peut se prouver rigoureusement en utilisant la continuité de l'application $M \mapsto P^{-1}MP$). Dans ce cas, $\lim_{p\to+\infty} A^p$ existe si et seulement si les limites $\lim_{p\to+\infty} (ja)^p$ existent pour tout entier j tel que $1 \leq j \leq n$. Cela revient à dire que

$$\forall j \in \{1, ..., n\} \quad ja \leq 1$$

c'est-à-dire $a \leq \dfrac{1}{n}$. Dans ce cas, la limite de A^p est $L = (l_{ij})$ avec

$$\forall i, j \in \{1, ..., n\} \quad l_{ij} = \lim_{p \to +\infty} (b_{ij})$$

Compte tenu de

$$b_{ij} = \begin{cases} -((j-1)\,a)^p + (ja)^p & \text{si } i < j \\ (ja)^p & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i > j, \end{cases}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} i > j \quad &\Rightarrow \quad l_{ij} = 0 \\ \forall j \in \{1, ..., n-1\} \quad & l_{jj} = 0 \\ l_{nn} &= \begin{cases} 0 & \text{si } a < 1/n \\ 1 & \text{si } a = 1/n \end{cases} \\ i < j < n \quad &\Rightarrow \quad l_{ij} = 0 \\ i < j = n \quad &\Rightarrow \quad l_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } a < 1/n \\ 1 & \text{si } a = 1/n. \end{cases} \end{aligned}$$

En conclusion :

▶ Si $1/n < a \leq 1$, la suite (A^p) n'admet pas de limite quand p tend vers l'infini.

▶ Si $0 < a < 1/n$, A^p tend vers la matrice nulle.

▶ Si $a = 1/n$, A^p tend vers

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Partie III

1) L'effectif total est $N = 229+325+257+119+50+17+2+1+0 = 1000$, et $m = \sum_{i=1}^{8} \frac{n_i}{N} x_i$. On obtient

$$\begin{aligned} m \;\; = \;\; & 0,229 \times 0 + 0,325 \times 1 + 0,257 \times 2 + 0,119 \times 3 + 0,050 \times 4 \\ & + 0,017 \times 5 + 0,002 \times 6 + 0,001 \times 7, \end{aligned}$$

soit $m = 1,5$.

2) Une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ (où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$) lorsque sa loi de probabilité est

$$p(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. On sait que l'espérance $E(X)$, la variance $V(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ d'une loi de Poisson de paramètre λ sont $E(X) = V(X) = \lambda$ et $\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$. Considérons une distribution de Poisson de paramètre la moyenne $m = 3/2$ obtenue au 1). On obtient les probabilités

$$p_k = p(X = k) = e^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{k!} \left(\frac{3}{2}\right)^k.$$

En considérant un échantillon de taille $N = 1000$, le tableau des effectifs théoriques pour la loi de Poisson de paramètre $m = 1,5$ est (approximativement) :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
e_i	223	334	251	125	47	14	3,5	0,8	0,1

où $e_i = p_i \times N$. Ce tableau ressemble beaucoup à celui de l'énoncé. La distribution proposée est donc proche de celle d'une loi de Poisson.

3) Par définition

$$V = \sum_{i=1}^{8} \frac{n_i}{N} (x_i - m)^2 \quad \text{et} \quad \sigma = \sqrt{V},$$

donc

$$\begin{aligned} V = {} & 0,229 \times (0 - 1,5)^2 + 0,325 \times (1 - 1,5)^2 + 0,257 \times (2 - 1,5)^2 \\ & + 0,119 \times (3 - 1,5)^2 + 0,050 \times (4 - 1,5)^2 + 0,017 \times (5 - 1,5)^2 \\ & + 0,002 \times (6 - 1,5)^2 + 0,001 \times (7 - 1,5)^2 \\ = {} & 1,52 \ ; \end{aligned}$$

puis $\sigma = \sqrt{1.52} \simeq 1,2329$.
L'écart-type de la loi de Poisson de paramètre $m = 1,5$ étant $\sqrt{1,5} \simeq 1,2247$. Les deux distributions sont donc très proches l'une de l'autre.

Partie IV

1) La probabilité p_1 de jeter un seul dé est égale à la somme $p_B + p_R$ où p_B désigne la probabilité de tirer 3 boules blanches, et p_R celle de tirer 3 boules rouges.
Si E_k désigne l'événement "Tirer une boule blanche au k-ième tirage", on obtient (en termes de probabilités conditionnelles) :

$$\begin{aligned} p_B &= p\left(E_1 \cap E_2 \cap E_3\right) \\ &= p\left(E_3 / \left(E_1 \cap E_2\right)\right) \times p\left(E_2 / E_1\right) \times p\left(E_1\right) \\ &= \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{120}, \end{aligned}$$

puisque la probabilité de tirer une blanche est de :

▷ 3/10 au 1er tirage, l'urne contient alors 2 blanches et 7 rouges,

▷ 2/9 au 2nd tirage (sachant que l'on a tiré une blanche au 1er tirage), l'urne contient alors une blanche et 7 rouges,

▷ 1/8 au 3ème tirage (sachant que l'on a tiré des blanches aux 1er et 2nd tirages).

De la même façon,

$$p_R = \frac{7}{10} \times \frac{6}{10} \times \frac{5}{10} = \frac{21}{100},$$

puisque la probabilité de tirer une rouge est de :

▷ 7/10 au 1er tirage, l'urne contient alors 4 blanches et 6 rouges,

▷ 6/10 au 2nd tirage (sachant que l'on a tiré une rouge au 1er tirage), l'urne contient alors 5 blanches et 5 rouges,

▷ 5/10 au 3ème tirage (sachant que l'on a tiré des rouges aux 1er et 2nd tirages).

En conclusion :

$$p_1 = p_B + p_R = \frac{1}{120} + \frac{21}{100} = \frac{131}{600} \simeq 0,22.$$

2) Soient p_4 la probabilité d'obtenir un 4, et p_2 la probabilité de jeter 2 dés. On a

$$p_2 = 1 - p_1 = 1 - \frac{131}{600} = \frac{469}{600}.$$

Les formules des probabilités totales et des probabilités conditionnelles donnent :

$$\begin{aligned} p_4 &= p\left((\text{obtenir } 4) \cap (\text{jeter 1 dé})\right) + p\left((\text{obtenir } 4) \cap (\text{jeter 2 dés})\right) \\ &= p\left((\text{obtenir } 4) \,/\, (\text{jeter 1 dé})\right) \times p_1 + p\left((\text{obtenir } 4) \,/\, (\text{jeter 2 dés})\right) \times p_2. \end{aligned}$$

Bien entendu $p\left((\text{obtenir } 4) / (\text{jeter 1 dé})\right) = 1/6$. Cela étant, il y a 3 façons d'obtenir 4 en jetant 2 dés : si (x, y) désigne l'événement élémentaire "obtenir x points au premier lancer, puis y points au second", nous obtenons 4 lors des trois issues $(1, 3)$, $(2, 2)$ ou $(3, 1)$. Comme on dénombre 36 événements élémentaires possibles,

$$p\left((\text{obtenir } 4) / (\text{jeter 2 dés})\right) = \frac{3}{36}.$$

En remplaçant :

$$p_4 = \frac{1}{6}p_1 + \frac{3}{36}p_2 = \frac{1}{6} \times \frac{131}{600} + \frac{3}{36} \times \frac{469}{600} = \frac{731}{7200} \simeq 0,1015.$$

3) En raisonnant comme au 2), on trouve que la probabilité cherchée est

$$p_p = p\left(\left(\begin{array}{c}\text{obtenir}\\ \text{nbre pair}\end{array}\right) / \left(\begin{array}{c}\text{jeter}\\ \text{1 dé}\end{array}\right)\right) \times p_1 + p\left(\left(\begin{array}{c}\text{obtenir}\\ \text{nbre pair}\end{array}\right) / \left(\begin{array}{c}\text{jeter}\\ \text{2 dés}\end{array}\right)\right) \times p_2.$$

La probabilité d'obtenir un nombre pair en jetant un dé est 1/2.
Si l'on jette 2 dés, on obtient un nombre pair si et seulement si l'on est dans l'un des 18 cas favorables suivants (sur 36 cas possibles) :

	2	4	6	8	10	12
	$(1,1)$	$(1,3)$	$(1,5)$	$(2,6)$	$(4,6)$	$(6,6)$
		$(2,2)$	$(2,4)$	$(3,5)$	$(5,5)$	
		$(3,1)$	$(3,3)$	$(4,4)$	$(6,4)$	
			$(4,2)$	$(5,3)$		
			$(5,1)$	$(6,2)$		

La probabilité d'obtenir un nombre pair en jetant deux dés est donc 18/36, soit 1/2. Finalement

$$p_p = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2 = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}(1 - p_1) = \frac{1}{2}.$$

Après tous ces tirages et le jeté de dés, nous avons exactement une chance sur deux d'obtenir un nombre pair !

8.2 CAPLP Maths-Sciences Physiques 2006

Les quatre exercices formant cette épreuve 2006 du CAPLP externe de Mathématiques-Sciences Physiques nous permet de répondre à des questions qui pourraient être posées à l'oral des concours (Exercice 1), s'entraîner sur un problème de géométrie en utilisant les nombres complexes (Exercice 2), profiter d'un problème de probabilités (Exercice 3), et, pour finir, parler de polynômes et d'intégration.
Voilà à n'en pas douter un bon entraînement sur ces thèmes !

8.2.1 Enoncé

Exercice 1

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. Préciser si chacune des affirmations suivantes est vraie ou est fausse, et justifier la réponse.

1. Soient f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et g une fonction définie sur $f(I)$. Les fonctions f et g ne sont pas nécessairement dérivables. Si f est décroissante sur I et si g est décroissante sur $f(I)$, alors $g \circ f$ croissante sur I.

2. Si x est un nombre réel irrationnel, alors pour tout nombre entier naturel non nul n le réel x^n est irrationnel.

3. Soit (E) l'équation différentielle : $y" + 9y = 0$. La seule solution de (E) qui vérifie la condition initiale $y(0) = 0$ est la fonction nulle.

4. Pour tout nombre entier naturel n on a l'égalité : $\sum_{k=0}^{n} k^3 = (\sum_{k=0}^{n} k)^2$.

5. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si f est périodique et monotone sur $\mathbb{R}$, alors f est constante.

6. Toute suite réelle strictement croissante tend vers $+\infty$.

7. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et $(u_1, u_2, ..., u_n)$ une base de E. Pour tout vecteur non nul v de E, la famille $(u_1, u_2, ..., u_n, v)$ est encore une base de E.

8. Le plan affine euclidien étant rapporté à un repère orthonormal, deux droites non parallèles aux axes du repère sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs est égal à (-1).

Exercice 2

Le but de cet exercice est l'étude de quelques propriétés géométriques des quadrangles harmoniques.

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. Dans tout l'exercice le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Partie I :

Soient les points A, B, C, D d'affixes respectives $a = -2 + 2i$; $b = -2i$; $c = -2$; $d = 2+4i$. Soient les nombres complexes Z_1 et Z_2 tels que $Z_1 = \dfrac{b-a}{d-a}$ et $Z_2 = \dfrac{b-c}{d-c}$.

1. Faire une figure et placer les points A, B, C et D.

2. Écrire Z_1 et Z_2 sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

3. En déduire la nature des triangles BAD et BCD.

4. Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Partie II :

Soient quatre points quelconques A, B, C, D distincts deux à deux, d'affixes respectives a, b, c et d. On appelle birapport des quatre points A, B, C, D, rangés dans cet ordre, le quotient, noté $[A, B, C, D]$:

$$[A, B, C, D] = \left(\frac{c-a}{c-b}\right) : \left(\frac{d-a}{d-b}\right).$$

1. Montrer que le birapport $[A, B, C, D]$ est un nombre réel si et seulement si les quatre points A, B, C, D sont cocycliques ou alignés.

2. Montrer que la relation $[A, B, C, D] = -1$ est équivalente à chacune des relations suivantes :

(1) $\quad 2\,(ab + cd) = (a + b)\,(c + d)\,;$

(2) $\quad \left(c - \dfrac{a+b}{2}\right)\left(d - \dfrac{a+b}{2}\right) = \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2.$

Dans la suite du problème, on appelle quadrangle harmonique la figure formée par quatre points A, B, C, D distincts deux à deux, non alignés tels que le birapport $[A, B, C, D]$ soit égal à -1.

3. Montrer que le quadrangle A, B, C, D de la partie I est harmonique.

4. Soit A, B, C, D un quadrangle harmonique. On note I le milieu du

segment $[AB]$. En utilisant les résultats de la question 2 ci-dessus, montrer que la droite (AB) est la bissectrice de l'angle des demi-droites $[IC)$ et $[ID)$, et que l'on a

$$IC \times ID = \frac{AB^2}{4}.$$

Exercice 3

Le but de cet exercice est l'étude d'une chaîne de transmissions aléatoires d'une information binaire.

Un émetteur E émet une information binaire (c'est-à-dire ne prenant que la valeur 0 ou la valeur 1). Un récepteur R reçoit cette information qui, pour des raisons non développées ici, peut être conforme ou non à l'information émise. Quelle que soit l'information émise par E (« 0 » ou « 1 »), la probabilité que l'information reçue par R soit conforme à l'information émise par E est égale à p $(0 < p < 1)$ et la probabilité que l'information reçue par R soit non-conforme à l'information émise est égale à $1 - p$.
Ainsi par exemple lorsque l'information émise par E est « 0 », la probabilité que l'information reçue par R soit « 0 » est égale à p et la probabilité que l'information reçue par R soit « 1 » est égale à $1 - p$.

Partie I :

Dans cette partie, l'information binaire est transmise le long d'une chaîne de $n + 1$ éléments électroniques notés E_0, E_1, ..., E_n. Chaque élément E_k est successivement récepteur, puis émetteur, excepté le premier élément E_0 qui est seulement émetteur et le dernier élément E_n qui est seulement récepteur. L'information émise par un émetteur-récepteur est toujours identique à celle reçue.
Pour tout nombre entier k compris entre 0 et $n - 1$, la transmission d'information de l'élément E_k à l'élément suivant E_{k+1} suit la loi définie en début d'exercice, c'est-à-dire que l'élément E_{k+1} reçoit correctement l'information binaire émise par E_k avec une probabilité égale à p $(0 < p < 1)$, et reçoit l'information contraire avec la probabilité $1 - p$.

Par ailleurs, on a constaté que la qualité de la transmission d'un élément E_k à l'élément suivant E_{k+1} ne dépend pas de ce qui s'est passé lors des transmissions précédentes. On note A_k $(1 < k < n)$, l'événement « la valeur reçue par E_k est identique à celle émise par E_0 », et on désigne par p_k sa probabilité. On convient que $p_0 = 1$.

1. Etude du cas particulier $n = 2$.

   a. Construire un arbre pondéré décrivant cette situation dans le cas $n = 2$. On précisera sur ce schéma les différentes probabilités.

b. Déterminer p_1 et p_2.

2. Etude du cas général. Démontrer que pour tout nombre entier k compris entre 0 et $n-1$ on a $p_{k+1} = (2p-1)\,p_k + 1 - p$.

3. On se propose de déterminer l'expression de p_n en fonction de n.

a. Pour tout nombre entier naturel k inférieur ou égal à n, on pose $u_k = p_k - \dfrac{1}{2}$.

i. Montrer que les $(u_k)_{0\leq k\leq n}$ sont les premiers termes d'une suite géométrique dont on précisera la raison.

ii. En déduire l'expression de p_n en fonction de n et de p.

b. Démontrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

c. Comment peut-on interpréter ce résultat ?

Partie II :

Dans cette partie, l'émetteur E_0 émet une information binaire transmise directement, sans passer par des intermédiaires, vers une famille de récepteurs. Dans la suite de l'exercice on supposera que cette famille est infinie, et on la notera $(R_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Une partie de cette famille de récepteurs $(R_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est « à l'écoute », autrement dit est prête à recevoir l'information émise par E_0 , conforme ou non. On suppose que les transmissions entre l'émetteur E_0 et chacun des récepteurs « à l'écoute » dans la famille $(R_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont indépendantes les unes des autres et que la règle de transmission est la même que celle définie en début d'exercice, c'est-à-dire qu'un récepteur « à l'écoute » reçoit correctement l'information binaire émise par E_0 avec une probabilité égale à p $(0 < p < 1)$, et reçoit l'information contraire avec la probabilité $1 - p$.

1. On considère que n récepteurs sont « à l'écoute ». Déterminer la probabilité que k d'entre eux exactement reçoivent correctement la valeur émise par E_0 (k étant un nombre entier compris entre 0 et n).

2. Le nombre de récepteurs « à l'écoute » est une variable aléatoire X. On admet que cette variable suit une loi de Poisson de paramètre λ, λ étant un nombre réel strictement positif donné. Pour tout entier naturel k on a donc

$$p\,(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}.$$

On appelle Y la variable aléatoire représentant le nombre de récepteurs de la famille (R_i) qui reçoivent la valeur émise par l'émetteur E_0.

a. Décrire par une phrase l'événement $(Y = 0)$.

b. On appelle B_n l'événement : « n récepteurs exactement sont « à

l'écoute » ». Démontrer que

$$p\left((Y=0)\cap B_n\right)=\frac{e^{-\lambda}\left(1-p\right)^n\lambda^n}{n!}.$$

c. Justifier que l'on peut décrire l'événement $(Y=0)$ sous la forme suivante :

$$(Y=0)=\bigcup_{n=0}^{+\infty}\left[(Y=0)\cap B_n\right].$$

En déduire que $p\left(Y=0\right)=e^{-\lambda p}$ (on rappelle que : $\forall x\in\mathbb{R}\quad\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$).

d. Pour tout nombre entier k naturel, déterminer $P(Y=k)$. En déduire que Y suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre. Donner alors son espérance $E(Y)$ et sa variance $V(Y)$.

Exercice 4

Le but de cet exercice est l'étude de propriétés liées aux polynômes de Bernoulli.
Pour tout nombre entier naturel k tel que $0\leq k<n$, on note $\binom{n}{k}$ le nombre de combinaisons de k éléments pris parmi n. On rappelle que

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

On admet, dans tout cet exercice, qu'il existe une unique suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la condition initiale $b_0=1$ et la relation de récurrence $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}b_k=0$, valable pour tout n entier supérieur ou égal à 2.
On appelle nombres de Bernoulli les nombres réels notés b_k ainsi définis. On appelle polynômes de Bernoulli les polynômes $B_n\left(X\right)$ définis par : $B_0\left(X\right)=1$ et pour tout nombre entier naturel non nul n,

$$B_n\left(X\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_kX^{n-k}.$$

1. Déterminer b_1, b_2, b_3 et b_4. Montrer en particulier que $b_4=-1/30$.
2. Déterminer les polynômes $B_1\left(X\right)$, $B_2\left(X\right)$ et $B_3\left(X\right)$.
3. Vérifier que, pour tout nombre entier $n\geq 2$, $B_n\left(0\right)=B_n\left(1\right)=b_n$.
4. Démontrer que, pour tout nombre entier $n\geq 1$, $B_n'\left(X\right)=nB_{n-1}\left(X\right)$.
5. En déduire que, pour tout nombre entier $n\geq 1$, $\int_0^1 B_n\left(t\right)\,dt=0$.

6. Établir par récurrence que, pour tout nombre entier $n \geq 1$,

$$B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}.$$

7. En déduire que pour tout nombre entier naturel m, et pour tout nombre entier $n \geq 2$, on a

$$\sum_{k=0}^{m} k^n = \frac{1}{n+1}\left(B_{n+1}(m+1) - B_{n+1}(0)\right).$$

Retrouver alors la formule donnant $\sum_{k=0}^{m} k^2$.

8. On admet dans les questions suivantes que la suite (B_n) est l'unique suite de polynômes vérifiant les propriétés démontrées aux questions 4 et 5 et telle que $B_0(X) = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $A_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$.

a. Démontrer que la suite (A_n) est confondue avec la suite (B_n).

b. En déduire que pour tout nombre entier $p \geq 1$, $b_{2p+1} = 0$.

9. Soient n et p deux nombres entiers supérieurs ou égaux à 1. Soit f une fonction de classe C^{2p+1} sur l'intervalle $[0,1]$. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on désigne par $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de f et on pose par convention $f^{(0)} = f$.

a. Montrer que, pour tout nombre entier n de l'intervalle $[2, 2p+1]$,

$$\int_0^1 f^{(n)}(t)\, B_n(t)\, dt = b_n\left(f^{(n-1)}(1) - f^{(n-1)}(0)\right) - n\int_0^1 f^{(n-1)}(t)\, B_{n-1}(t)\, dt.$$

b. En déduire que, pour tout nombre entier naturel k de l'intervalle $[1, p]$,

$$\frac{1}{(2k+1)!}\int_0^1 f^{(2k+1)}(t)\; B_{2k+1}(t)\, dt = -\frac{b_{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)\right) + \frac{1}{(2k-1)!}\int_0^1 f^{(2k-1)}(t)\, B_{2k-1}(t)\, dt.$$

c. Montrer alors la première formule d'Euler-Mac Laurin : pour tout nombre entier naturel p non nul,

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{f(0)+f(1)}{2} - \sum_{k=1}^{p} b_{2k}\frac{f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)}{(2k)!} - \frac{1}{(2p+1)!}\int_0^1 f^{(2p+1)}(t)\, B_{2p+1}(t)\, dt.$$

8.2.2 Solution

Exercice 1

1. Par hypothèse,

$$\begin{cases} \forall x, x' \in I & x \leq x' \Rightarrow f(x) \geq f(x') \\ \forall y, y' \in f(I) & y \leq y' \Rightarrow g(y) \geq g(y'), \end{cases}$$

donc

$$\forall x, x' \in I \quad x \leq x' \;\Rightarrow\; f(x) \geq f\left(x'\right) \;\Rightarrow\; g(f(x)) \leq g\left(f\left(x'\right)\right),$$

et l'on peut affirmer que $g \circ f$ est croissante sur I.

2. $(\sqrt{2})^2 = 2$ est rationnel alors que $\sqrt{2}$ ne l'est pas. L'assertion proposée est donc fausse.

3. Les solutions de l'équation différentielle $y" = -\omega^2 y$ sont de la forme $y = a\cos\omega t + b\sin\omega t$. La condition $y(0) = 0$ équivaut donc à $a = 0$, ce qui ne suffit pas à assurer la nullité de la fonction y.
Toute fonction $y = b\sin\omega t$ vérifie l'équation $y" = -\omega^2 y$ et la condition initiale $y(0) = 0$ sans pour autant être nulle. L'assertion proposée est donc fausse.

Remarque : Cette question nous invite à revoir l'étude des équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants, et pour cela un bon moyen consiste à travailler la leçon d'oral 1 du CAPES externe correspondante que l'on trouvera au Chap. 12 de [3]. Bornons-nous ici à démontrer que les solutions générales de l'équation (E) : $y" = -\omega^2 y$ sont de la forme $y = a\cos\omega t + b\sin\omega t$ (en suivant la méthode du § 12.3.2 de [3]).

• Pour commencer, on vérifie que les fonctions $\cos\omega t$ et $\sin\omega t$ sont des solutions particulières de (E).

• Ensuite, on démontre que toute solution $y(t)$ de (E) est de la forme $a\cos\omega t + b\sin\omega t$. Pour cela, une solution $y(t)$ de (E) étant donnée, on détermine les réels a et b de sorte que $z(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$ vérifie $z(0) = y(0)$ et $z'(0) = y'(0)$. On trouve

$$a = y(0) \quad et \quad b = \frac{y'(0)}{\omega}.$$

On constate alors que la solution $y - z$ de (E) vérifie les conditions initiales $(y-z)(0) = (y-z)'(0) = 0$, ce qui entraîne $y = z$ compte tenu du Lemme suivant :

Lemme : Si $S_{\mathbb{R}}$ désigne l'ensemble des solutions réelles de (E),

$$\left.\begin{array}{l} y \in S_{\mathbb{R}} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 0.$$

Preuve du Lemme : Si $y \in S_{\mathbb{R}}$, la fonction $y'^2 + \omega^2 y^2$ est constante puisque $\left(y'^2 + \omega^2 y^2\right)' = 2y'\left(y'' + \omega^2 y\right) = 0$. Par hypothèse $y(0) = y'(0) = 0$, donc la fonction $y'^2 + \omega^2 y^2$ est identiquement nulle. Cela entraîne $y = 0$. ■

4. Plusieurs tests effectués à la main ou à l'aide d'une calculatrice donnent

$$\sum_{k=0}^{2} k^3 = 9 = \left(\sum_{k=0}^{2} k\right)^2 ; \quad \sum_{k=0}^{3} k^3 = 36 = \left(\sum_{k=0}^{3} k\right)^2$$

$$\sum_{k=0}^{7} k^3 = 784 = \left(\sum_{k=0}^{7} k\right)^2 ;$$

de sorte qu'il soit raisonnable de conjecturer que l'égalité $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$ est vraie pour tout n.

Première méthode : Récurrence sur n. Comme $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, il s'agit de prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}.$$

La formule est triviale au rang $n = 1$. Si elle est vraie au rang n, alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3 &= \frac{n^2 (n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{(n+1)^2}{4}\left(n^2 + 4(n+1)\right) \\ &= \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{4}, \end{aligned}$$

et la formule est encore vraie au rang $n+1$.

Seconde méthode : Calculs explicites des sommes. Bien que plus longue que la précédente, il est toujours utile de savoir comment calculer les sommes $\sum_{k=1}^{n} k^2$ et $\sum_{k=1}^{n} k^3$. Posons

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} k, \quad S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 \quad \text{et} \quad S_3 = \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

La somme des n premiers termes d'une progression arithmétique est connue, et l'on sait que $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$. Pour calculer les deux autres sommes, l'idée est de sommer des identités remarquables. Puisque $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$ (pour tout entier k), on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n$$

soit

$$(n+1)^3 + \sum_{k=1}^{n} k^3 - 1 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3S_2 + 3S_1 + n$$

$$3S_2 = (n+1)^3 - 3\frac{n(n+1)}{2} - (n+1)$$

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Puisque $(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ (pour tout entier k), on obtient de même

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^4 = \sum_{k=1}^{n} k^4 + 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + n$$

d'où $4S_3 = (n+1)^4 - 1 - 6S_2 - 4S_1 - n$, et après simplifications,

$$S_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2.$$

5. Supposons que f soit monotone sur $\mathbb{R}$, par exemple croissante sur $\mathbb{R}$. Si f est périodique, il existe $T \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et l'on a en particulier

$$0 \leq x \leq T \;\Rightarrow\; f(0) \leq f(x) \leq f(T) = f(0) \;\Rightarrow\; f(x) = f(0),$$

ce qui montre que f est constante sur $[O, T]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un multiple kT de T ($k \in \mathbb{Z}$) tel que $0 \leq x + kT \leq T$, et dans ce cas

$$f(x) = f(x + kT) = f(0).$$

Cela montre que f est constante sur tout $\mathbb{R}$.

Remarque : Et que répondre si l'on nous demande de prouver l'existence d'un entier k tel que $0 \leq x + kT \leq T$? On peut par exemple introduire la partie entière $[\frac{x}{T}]$ du réel $\frac{x}{T}$, écrire

$$[\frac{x}{T}] \leq \frac{x}{T} < [\frac{x}{T}] + 1, \quad \text{soit} \quad 0 \leq \frac{x}{T} - [\frac{x}{T}] < 1,$$

multiplier tous les membres de ces inégalités par T, pour obtenir

$$0 \leq x - [\frac{x}{T}]T < T.$$

L'existence de $k = -[\frac{x}{T}]$ ne fait plus aucun doute. Une dernière question tout de même : pouvez-vous démontrer l'existence d'une "partie entière" pour n'importe quel réel x ? (Ind. : se placer d'abord dans le cas où $x > 0$, puis utiliser que $\mathbb{N}$ est un ensemble bien ordonné et que $\mathbb{R}$ est archimédien).

6. Une suite réelle strictement croissante ne converge pas nécessairement vers $+\infty$, comme on le voit avec la suite $\left(1 - \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui tend vers 1.

Remarque : D'après le Théorème des suites monotones, toute suite réelle croissante majorée est convergente (dans $\mathbb{R}$). Il est par ailleurs facile de vérifier qu'une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$. On peut donc affirmer que toute suite réelle croissante est convergente dans la droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, et qu'une telle suite converge vers une limite finie ou non suivant qu'elle est majorée ou non.

7. Cela est impossible ! Le vecteur v appartient à E, donc s'écrit comme combinaison linéaire des éléments de la base $(u_1, u_2, ..., u_n)$. Il existe des réels α_1, ..., α_n, non tous nuls puisque $v \neq 0$, tels que $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$. Nous venons d'écrire une relation de dépendance linéaire non triviale entre les vecteurs u_1, u_2, ..., u_n, v, ce qui prouve que la famille $(u_1, u_2, ..., u_n, v)$ est liée, donc n'est pas une base de E.
Je rappelle qu'une base de E est, par définition, une famille à la fois libre et génératrice de E.

8. Deux droites D et D' non parallèles à l'axe Oy admettent des équations de la forme $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$. Les coefficients a et a' sont les pentes de D et D', et les vecteurs $\overrightarrow{u}\,(1, a)$, $\overrightarrow{u}'\,(1, a')$ dirigent respectivement D et D'. Comme le repère est orthonormal,

$$D \perp D' \Leftrightarrow \overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{u}' = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ a' \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1 + aa' = 0 \Leftrightarrow aa' = -1.$$

Exercice 2

I.1. Voir FIG. 8.1.
I.2. En sautant quelques étapes :

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{b-a}{d-a} = \frac{1-2i}{2+i} = \frac{(1-2i)(2-i)}{5} = -i = e^{-i\pi/2}, \\ Z_2 &= \frac{b-c}{d-c} = \frac{1}{2} \times \frac{1-i}{1+i} = \frac{1}{2} \times \frac{(1-i)^2}{2} = -\frac{i}{2} = \frac{1}{2} e^{-i\pi/2}. \end{aligned}$$

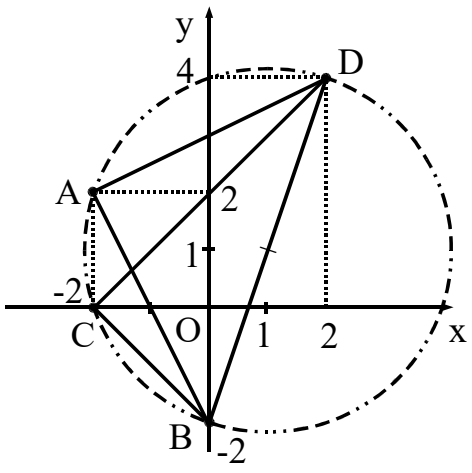


FIG. 8.1 – Figure demandée en I.1

I.3. Comme $e^{-i\pi/2}$ est un nombre complexe de module 1, nous obtenons $BA = |b-a| = |d-a| = DA$, et le triangle BAD est isocèle en A. Mieux, la relation $b - a = e^{-i\pi/2}(d-a)$ montre que B est l'image de D par la rotation de centre A d'angle $-\pi/2$, de sorte que BAD soit rectangle en A.
L'égalité $b-c = \frac{1}{2}e^{-i\pi/2}(d-c)$ montre que B est l'image de D par la similitude directe de centre C, d'angle $-\pi/2$, et de rapport $1/2$. En particulier, BCD est rectangle en C.

I.4. On sait que le sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle appartient au cercle de diamètre l'hypoténuse. Les triangles BAD et BCD étant rectangles en A et C, on peut affirmer que A et C appartiennent au cercle de diamètre $[BD]$, comme dessiné sur la FIG. 8.1.

II.1. Le critère de cocyclicité en termes d'affixes vu en cours ([2], Corollaire 16) nous donne

$$\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow A,\ B,\ C,\ D \text{ alignés ou cocycliques.}$$

Cela s'écrit ici

$$[A, B, C, D] \in \mathbb{R} \Leftrightarrow A,\ B,\ C,\ D \text{ alignés ou cocycliques.}$$

Remarque méthodologique pour le concours : On peut hésiter à faire un appel au cours aussi "décisif" qui pourrait être interprété comme du bluff, et traité en conséquence.

Lorsqu'on se retrouve seul devant sa feuille, on doit rapidement décider du niveau de vérité que l'on désire atteindre, et choisir entre plusieurs options :

> *Option 1* : L'énoncé nous demande de démontrer que le birapport est réel si et seulement si les points sont alignés ou cocycliques. Il s'agit d'un résultat de cours, faisant partie du "bagage standard du candidat" tel que décrit dans le programme officiel du concours. Je peux donc y faire appel (de façon aussi précise que possible).

Avantages : Je traite rapidement la question, et je peux utiliser le temps ainsi économisé pour avancer ailleurs dans le sujet.

Inconvénients : Je risque de déplaire au correcteur, puisque l'énoncé me demande de montrer ce résultat, et non pas de le rappeler. Je risque aussi d'être classé parmi les "bluffeurs" qui ne connaissent pas ce résultat, mais l'affirment de façon péremptoire. Il est vrai que le reste de la copie montrera au correcteur si j'ai tendance à bluffer à chaque moment, ou si je sais bien de quoi je parle, en général, et cela modulera sans aucun doute la note que j'obtiendrai à cette question.

> *Option 2* : Je profite de cette question pour montrer au correcteur que je sais que la condition $[A, B, C, D] \in \mathbb{R}$ se ramène au célèbre critère de cocyclicité utilisant des angles de droites ([2], Corollaire 15).

En effet, avec des mesures d'angles de droites (donc modulo π),

$$\begin{aligned}
[A, B, C, D] \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \arg\left(\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}\right) = 0 \quad (\pi) \\
&\Leftrightarrow \arg\left(\frac{c-a}{c-b}\right) = \arg\left(\frac{d-a}{d-b}\right) \quad (\pi)\,.
\end{aligned}$$

Par suite, en notant Ox le premier axe de coordonnées $(O, \overrightarrow{u})$,

$$\begin{aligned}
[A, B, C, D] \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \arg(c-a) - \arg(c-b) = \arg(d-a) - \arg(d-b) \ (\pi) \\
&\Leftrightarrow (Ox, \overrightarrow{AC}) - (Ox, \overrightarrow{BC}) = (Ox, \overrightarrow{AD}) - (Ox, \overrightarrow{BD}) \quad (\pi) \\
&\Leftrightarrow (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA}) \quad (\pi) \\
&\Leftrightarrow A,\ B,\ C,\ D \text{ alignés ou cocycliques.}
\end{aligned}$$

Avantages : Il y a fort à parier que ce soit là la solution attendue par le correcteur. Je montre en tout cas combien je sais faire le lien entre affixes et angles de droites, et donne précisément le critère de cocyclité en termes

d'angles de droites. Il s'agit, certes, d'un appel au cours, mais j'ai montré ce que je savais faire au correcteur, et cette solution ne peut être du bluff.

Inconvénients : J'utilise un autre résultat du cours, et je me pose toujours la question de savoir si ce résultat peut être admis.

> *Option 3* : Je démontre les deux critères de cocyclicité en termes d'angles de droites, ou en termes d'affixes. Ces critères sont des conséquences directes de la recherche des lignes de niveau de la fonction $M \mapsto (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ (π), et la preuve est à connaître ([2], Théorème 180) pour passer le concours, et fait partie d'une leçon d'oral au CAPES.

Avantages : Il n'y aura plus rien à dire.

Inconvénients : Je vais perdre du temps pour retrouver et rédiger cette preuve. J'hypothèque ainsi la suite de l'épreuve, et risque de me faire dépasser par d'autres candidats.
Je risque en outre de ne pas retrouver cette démonstration, même en y consacrant dix minutes (ce qui est important dans une épreuve en temps limité), ou encore d'écrire des choses fausses.
Cela m'énervera et je ne serai pas en bonne condition pour affronter les questions suivantes.

En conclusion, je choisis l'Option 2, en me réservant (mentalement) la possibilité de revenir détailler ce point s'il me reste du temps à la fin de l'épreuve.
Il est primordial d'engranger en priorité tous les points que je peux obtenir sur le sujet, et pour cela de montrer au correcteur "tout ce que je sais faire" sur le problème dans son ensemble, et non pas "en profondeur", sur une seule question.
Si je ne trouve plus rien d'intéressant à dire sur le problème, et s'il me reste du temps en fin d'épreuve, il est certain que je ne quitterai pas la salle, mais en profiterai pour me relire (dans tous les sens, et à l'envers s'il le faut !) ou pour m'attaquer aux questions que j'avais laissé de côté. Je dispose alors de tout le temps restant.

II.2. On a

$$[A, B, C, D] = -1 \Leftrightarrow (c-a)(d-b) = (a-d)(c-b) \quad (3)$$

et il est facile de démontrer que (3) équivaut à (1), et à (2). On peut simplifier cette vérification en plaçant l'origine du repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ en A, de sorte que

l'affixe a soit nulle. Dans ce cas, (1), (2) et (3) s'écrivent respectivement

$$\begin{cases} 2cd = b\,(c+d) & (1') \\ \left(c-\dfrac{b}{2}\right)\left(d-\dfrac{b}{2}\right) = \dfrac{b^2}{4} & (2') \\ c\,(d-b) = -d\,(c-b) & (3') \end{cases}$$

et on voit immédiatement que $(1')$ équivaut à $(3')$. En développant,

$$\left(2'\right) \;\Leftrightarrow\; cd - \frac{1}{2}bd - \frac{1}{2}bc = 0 \;\Leftrightarrow\; 2cd = b\,(c+d) \;\Leftrightarrow\; \left(1'\right),$$

et tout est démontré.

Remarque : Ce que l'on vient de faire est licite puisque revient :

- à utiliser un changement de repère (une translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$), donc un changement d'affixes, pour nous placer dans le repère $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ (si z et z' représentent l'ancienne et la nouvelle affixe d'un même point, on a $z = z' + a$) ;

- à démontrer les équivalences qui nous intéressent avec ces nouveaux affixes ;

- puis à retourner dans le premier repère pour retrouver les équations de l'énoncé.

II.3. Avec les quatre points de la partie I,

$$\begin{cases} 2\,(ab+cd) = 2\,(-2i\,(-2+2i) - 2\,(2+4i)) = -8i \\ (a+b)\,(c+d) = (-2)\times 4i = -8i \end{cases}$$

et l'égalité (1) de la question précédente est satisfaite, montrant que le quadrangle $ABCD$ est harmonique.

II.4. L'affixe ι du milieu I de $[AB]$ est $\frac{a+b}{2}$. En prenant le module des deux membres de la relation (2), on obtient $|c-\iota| \times |d-\iota| = |\iota|^2$, autrement dit $IC \times ID = AB^2/4$.
Pour vérifier que (AB) est la bissectrice du couple de demi-droites $([IC), [ID))$, choisissons l'origine O du repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ en I. La relation (2) s'écrit alors $cd = a^2$, ce qui entraîne

$$\arg c + \arg d = 2\arg a \quad (2\pi)$$

soit $\arg c - \arg a = \arg a - \arg d \;\; (2\pi)$. Compte tenu de

$$\begin{cases} \arg c - \arg a = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{IC}) - (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{IA}) = (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}) \\ \arg a - \arg d = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{IA}) - (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{ID}) = (\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IA}), \end{cases}$$

cela donne $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}) = (\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IA}) \;\; (2\pi)$, et cette dernière égalité signifie que $(IA) = (AB)$ est la bissectrice du couple $([IC), [ID))$.

Exercice 3

I.1.a. Dans la FIG. 8.2, x vaut 0 ou 1 et représente le message émis par E_0, et je note commodément $q = 1 - p$.

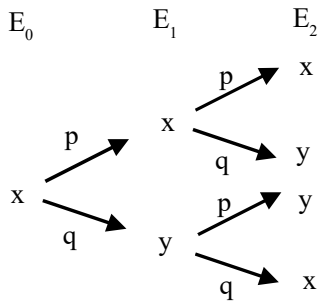


FIG. 8.2 – Arbre pondéré

I.1.b. On a $p_1 = p(A_1) = p$, et la "lecture" de l'arbre donne

$$p_2 = p(A_2) = p^2 + q^2.$$

La justification de cette seconde formule est donnée en I.2.

I.2. L'événement A_{k+1} est la réunion disjointe de $A_{k+1} \cap A_k$ et $A_{k+1} \cap \overline{A}_k$, où l'on note $\overline{A}$ l'événement contraire de A. On a alors

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= p(A_{k+1}) = p(A_{k+1} \cap A_k) + p\left(A_{k+1} \cap \overline{A}_k\right) \\ &= p(A_{k+1}/A_k)\, p(A_k) + p\left(A_{k+1}/\overline{A}_k\right) p\left(\overline{A}_k\right) \\ &= p \times p_k + q \times (1 - p_k) \\ &= (p - q)\, p_k + q = (2p - 1)\, p_k + 1 - p. \end{aligned}$$

I.3.a.i.

$$\begin{aligned} u_{k+1} = p_{k+1} - \frac{1}{2} &= (2p - 1)\, p_k + \frac{1}{2} - p \\ &= (2p - 1)\left(u_k + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} - p = (2p - 1)\, u_k \end{aligned}$$

donc (u_k) est une suite géométrique de raison $(2p - 1)$.

I.3.a.ii. On en déduit

$$u_n = (2p - 1)^n\, u_0 = \frac{(2p - 1)^n}{2}$$

d'où

$$p_n = \frac{1}{2}\left(1 + (2p-1)^n\right).$$

I.3.b. Puisque $0 < p < 1$, on a $0 < 2p - 1 < 1$ et $\lim_{n\to+\infty}(2p-1)^n = 0$. On en déduit $\lim_{n\to+\infty} p_n = 1/2$.

I.3c. Lorsque n devient grand, la probabilité pour que l'élément E_n reçoive le message effectivement transmis par E_0 se rapproche de $1/2$. Un récepteur situé "trop loin" de E_0 n'aura donc aucun moyen de connaître la nature du signal transmis. Quelle que soit la qualité du canal de transmission utilisé (autrement dit, quel que soit la valeur de p), il est toujours indispensable de limiter le nombre de relais lorsqu'on désire transmettre une information.
A titre d'exemple, le tableau suivant et la FIG. 8.3 montrent quelques valeurs de p_n lorsque $p = 0,98$, donc dans le cas d'une très bonne transmission.

n	1	2	4	8	16	32	64	128
p_n	0,98	0,961	0,925	0,861	0,760	0,635	0,536	0,503

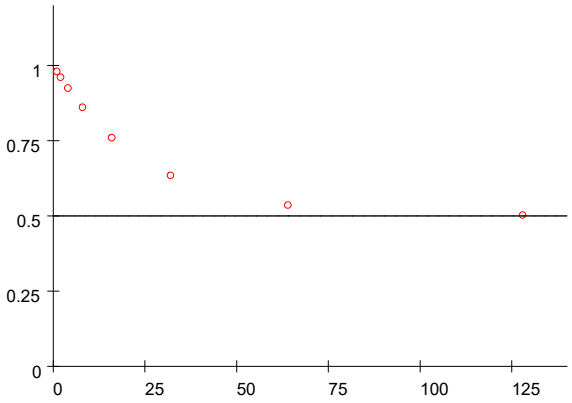


FIG. 8.3 – Probabilité p_n en fonction de n

II.1. Il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir k recepteurs pour lesquels le message est correctement reçu, parmi les n récepteurs "à l'écoute". La probabilité cherchée est donc $\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$, en notant $q = 1 - p$.

II.2.a. $(Y = 0)$ est l'événement : "Aucun récepteur ne reçoit la valeur émise par E_0".

II.2.b. Comme $p(B_n) = p(X = n) = e^{-\lambda}\lambda^n/n!$, on obtient

$$p((Y = 0) \cap B_n) = p((Y = 0)/B_n) \times p(B_n) = q^n \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = \frac{e^{-\lambda}(1-p)^n \lambda^n}{n!}.$$

II.2.c. Lorsqu'aucun récepteur ne reçoit la valeur émise par E_0, il se peut qu'il n'y ait aucun récepteur à l'écoute, ou bien qu'il en ait un seul, ou bien deux, etc. L'événement $(Y = 0)$ est donc la réunion disjointe des événements $(Y = 0) \cap B_n$(où $n \in \mathbb{N}$), et

$$\begin{aligned} p(Y = 0) &= \sum_{n\geq 0} p((Y = 0) \cap B_n) \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{e^{-\lambda}(1-p)^n \lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n\geq 0} \frac{[(1-p)\lambda]^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{(1-p)\lambda} = e^{-\lambda p}. \end{aligned}$$

II.2.d. • On a $(Y = k) = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} [(Y = k) \cap B_n]$ (réunion disjointe), et bien évidemment $(Y = k) \cap B_n = \varnothing$ dès que $n < k$. Ainsi

$$\begin{aligned} p(Y = k) &= \sum_{n\geq k} p((Y = k) \cap B_n) \\ &= \sum_{n\geq k} p((Y = k)/B_n) \times p(B_n) \\ &= \sum_{n\geq k} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \times \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \end{aligned}$$

et

$$p(Y = k) = \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!} \sum_{n\geq k} \frac{(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!} \times e^{\lambda q} = \frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^k}{k!}.$$

Cela montre que Y obéit à une loi de Poisson de paramètre λp.

• D'après le cours, l'espérance et la variance d'une loi de Poisson Y de paramètre λp sont égales à λp.

Remarque : Vérifions que l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$ d'une loi de Poisson X de paramètre λ est λ. Tout d'abord

$$E(X) = \sum_{k\geq 0} kp(X = k) = \sum_{k\geq 1} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k'\geq 0} \frac{\lambda^{k'}}{k'!} = \lambda.$$

Ensuite

$$\sum_{k\geq 0} k(k-1)p(X = k) = \sum_{k\geq 2} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-2)!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k\geq 2} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda^2,$$

d'où

$$\sum_{k\geq 0} k^2 p\left(X=k\right) - \sum_{k\geq 0} kp\left(X=k\right) = \lambda^2.$$

Cela s'écrit $E\left(X^2\right) - E\left(X\right) = \lambda^2$ et nous offre l'espérance du carré de la variable, soit $E\left(X^2\right) = \lambda + \lambda^2$. On en déduit $V\left(X\right) = E\left(X^2\right) - E\left(X\right)^2 = \lambda$.

Exercice 4

1. Le système

$$\left\{\begin{array}{l} b_0 + 2b_1 = 0 \\ b_0 + 3b_1 + 3b_2 = 0 \\ b_0 + 4b_1 + 6b_2 + 4b_3 = 0 \\ b_0 + 5b_1 + 10b_2 + 10b_3 + 5b_4 = 0 \end{array}\right.$$

se résout de proche en proche. On trouve $b_1 = -1/2$, puis

$$\left\{\begin{array}{l} b_2 = -\dfrac{1}{3}\left(b_0 + 3b_1\right) = \left(-\dfrac{1}{3}\right) \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{6}, \\ b_3 = -\dfrac{1}{4}\left(b_0 + 4b_1 + 6b_2\right) = -\dfrac{1}{4}\left(1 - 2 + 1\right) = 0, \\ b_4 = -\dfrac{1}{5}\left(b_0 + 5b_1 + 10b_2 + 10b_3\right) = -\dfrac{1}{5}\left(1 - \dfrac{5}{2} + \dfrac{5}{3}\right) = -\dfrac{1}{30}. \end{array}\right.$$

2. On trouve

$$\left\{\begin{array}{l} B_1\left(X\right) = b_0 X + b_1 = X - \dfrac{1}{2}, \\ B_2\left(X\right) = b_0 X^2 + 2b_1 X + b_2 = X^2 - X + \dfrac{1}{6}, \\ B_3\left(X\right) = b_0 X^3 + 3b_1 X^2 + 3b_2 X + b_3 = X^3 - \dfrac{3}{2}X^2 + \dfrac{1}{2}X. \end{array}\right.$$

3. Pour tout $n \geq 1$, on a $B_n\left(0\right) = \binom{n}{n} b_n = b_n$. Pour tout $n \geq 2$, on trouve

$$B_n\left(1\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k + b_n = 0 + b_n = b_n$$

en utilisant la relation de récurrence qui définit les coefficients de Bernoulli b_k.

4.

$$\begin{aligned} B_n'(X) &= \sum_{k=0}^{n}(n-k)\binom{n}{k}b_k X^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{n!}{k!(n-k-1)!}b_k X^{n-k-1} \\ &= n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}b_k X^{n-k-1} = nB_{n-1}(X). \end{aligned}$$

5. La question précédente montre qu'une primitive de $B_n(t)$ sur $\mathbb{R}$ est $\frac{1}{n+1}B_{n+1}(t)$, donc

$$\int_0^1 B_n(t)\,dt = \frac{1}{n+1}\left[B_{n+1}(t)\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}\left(b_{n+1}-b_{n+1}\right) = 0.$$

6. La propriété est vraie lorsque $n=1$, puisque

$$B_1(X+1) - B_1(X) = (X+1) - \frac{1}{2} - \left(X - \frac{1}{2}\right) = 1.$$

Supposons que la propriété annoncée soit vraie jusqu'au rang $n-1$ (avec $n \geq 2$), et montrons-là au rang n. Il s'agit de prouver que le polynôme

$$\xi(X) = B_n(X+1) - B_n(X) - nX^{n-1}$$

est nul. En dérivant et en appliquant la question 4, on trouve

$$\begin{aligned} \xi'(X) &= B_n'(X+1) - B_n'(X) - n(n-1)X^{n-2} \\ &= nB_{n-1}(X+1) - nB_{n-1}(X) - n(n-1)X^{n-2} \\ &= n\left(B_{n-1}(X+1) - B_{n-1}(X) - (n-1)X^{n-2}\right) = 0 \end{aligned}$$

de sorte que $\xi(X)$ soit un polynôme constant.
Comme $\xi(0) = B_n(1) - B_n(0) = b_n - b_n = 0$ (d'après la question 3), on obtient bien $\xi(X) = 0$ et l'on peut conclure.

7. D'après la question précédente,

$$\forall n \geq 0 \qquad k^n = \frac{1}{n+1}\left(B_{n+1}(k+1) - B_{n+1}(k)\right)$$

donc

$$\sum_{k=0}^{m} k^n = \frac{1}{n+1}\left(B_{n+1}(m+1) - B_{n+1}(0)\right).$$

Si $n = 2$, on obtient $\sum_{k=0}^{m} k^2 = \frac{1}{3} B_3(m+1)$ puisque $B_3(0) = b_3 = 0$. Le polynôme $B_3(X)$ a été calculé à la question 2, et l'on trouve

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m} k^2 = \frac{1}{3} B_3(m+1) &= \frac{1}{3}\left((m+1)^3 - \frac{3}{2}(m+1)^2 + \frac{1}{2}(m+1)\right) \\ &= \frac{1}{3}(m+1)\left((m+1)^2 - \frac{3}{2}(m+1) + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.\end{aligned}$$

8.a. On a $A_0(X) = B_0(1-X) = 1$. Compte tenu de ce que nous demande d'admettre l'énoncé, on aura prouvé que $A_n = B_n$ pout tout entier n si l'on montre que

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^* & A_n'(X) = nA_{n-1}(X) \\ \forall n \in \mathbb{N}^* & \int_0^1 A_n(t)\, dt = 0. \end{cases}$$

La vérification est facile :

$$A_n'(X) = (-1)^{n-1} B_n'(1-X) = (-1)^{n-1} n B_{n-1}(1-X) = nA_{n-1}(X)$$

et

$$\int_0^1 A_n(t)\, dt = (-1)^n \int_0^1 B_n(1-t)\, dt = (-1)^{n-1} \int_1^0 B_n(u)\, du = 0.$$

8.b. De $(-1)^n B_n(1-X) = B_n(X)$ on déduit $(-1)^n B_n(1) = B_n(0)$, donc $b_n((-1)^n - 1) = 0$. Par suite $b_{2p+1} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

9.a. Compte tenu de $B_n' = nB_{n-1}$, une intégration par partie donne

$$\int_0^1 f^{(n)}(t) B_n(t)\, dt = \left[f^{(n-1)}(t) B_n(t)\right]_0^1 - n \int_0^1 f^{(n-1)}(t) B_{n-1}(t)\, dt,$$

puis la formule annoncée puisque $B_n(0) = B_n(1) = b_n$.

9.b. On applique deux fois de suite la formule du 9.a et l'on utilise l'égalité $b_{2p+1} = 0$ déjà prouvée :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f^{(2k+1)}(t) B_{2k+1}(t)\, dt &= -(2k+1) \int_0^1 f^{(2k)}(t) B_{2k}(t)\, dt \\ &= -(2k+1)\Bigg(b_{2k}(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)) \\ &\qquad - 2k \int_0^1 f^{(2k-1)}(t) B_{2k-1}(t)\, dt \Bigg).\end{aligned}$$

On obtient la formule demandée en divisant à droite et à gauche l'égalité obtenue par $(2k+1)!$.

9.c. Si l'on pose $S_k = \frac{1}{(2k+1)!}\int_0^1 f^{(2k+1)}(t)\, B_{2k+1}(t)\ dt$, la question 9.b donne

$$S_k - S_{k-1} = -\frac{b_{2k}}{(2k)!}(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)).$$

En sommant, on trouve

$$S_p - S_0 = \sum_{k=1}^{p}(S_k - S_{k-1}) = -\sum_{k=1}^{p}\frac{b_{2k}}{(2k)!}(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)). \quad (*)$$

Comme

$$\begin{aligned} S_0 &= \int_0^1 f'(t)\, B_1(t)\ dt = \int_0^1 t f'(t)\ dt - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)\ dt \\ &= [tf(t)]_0^1 - \int_0^1 f(t)\ dt - \frac{1}{2}(f(1) - f(0)) \\ &= \frac{f(1)+f(0)}{2} - \int_0^1 f(t)\ dt, \end{aligned}$$

il suffit de remplacer dans $(*)$ pour obtenir la formule demandée :

$$\int_0^1 f(t)\ dt = \frac{f(1)+f(0)}{2} - \sum_{k=1}^{p}\frac{b_{2k}}{(2k)!}(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)) - S_p.$$

Bibliographie

[1] B. Balaguer — *La leçon d'analyse au CAPES de mathématiques* Ellipses, 1999.

[2] D.-J. Mercier — *Cours de géométrie, préparation au CAPES et à l'agrégation.* Publibook, 2005.

[3] D.-J. Mercier — *L'épreuve d'exposé au CAPES mathématiques, Leçons rédigées et commentées, Vol. II,* Publibook, 2006.

[4] D.-J. Mercier — *L'épreuve d'exposé au CAPES mathématiques, Leçons rédigées et commentées, Vol. IV*, Publibook, 2008.

[5] *Rapport du Sénat sur la détention d'actions.* http ://www.senat.fr/rap/r02-367/r02-3676.html (page accessible en janvier 2006).

Aux Editions Publibook...

Du Meme Auteur :

▷ Cours de géométrie, préparation au CAPES et à l'agrégation.

▷ La collection « L'épreuve d'exposé au CAPES mathématiques, 14 leçons rédigées et commentées », quatre volumes parus.

▷ La collection « Exercices pour le CAPES mathématiques (externe et interne) & l'agrégation interne, Algèbre, arithmétique, géométrie et probabilités », deux volumes parus.

▷ Annales du CAPES interne de Mathématiques de 2002 à 2008 + 2 problèmes supplémentaires = 9 problèmes corrigés.

Avec Ousseynou Nakoulima :

▷ Fonctions de plusieurs variables réelles, Exercices et problèmes corrigés pour la seconde année de licence de mathématiques et la préparation aux concours (CAPES, Agrégation...).

Avec Jean-Etienne Rombaldi :

▷ Annales du CAPES externe 1999 à 2005, 15 problèmes corrigés.

▷ Annales 2005, CAPES externe, interne, et Agrégation interne de Mathématiques, 6 problèmes corrigés.

▷ Annales 2006, CAPES externe, interne, Agrégation interne et CAPLP externe de Mathématiques, 6 problèmes corrigés.

▷ Annales de l'agrégation interne de mathématiques : 2005 à 2007, 6 problèmes corrigés.

▷ Annales du CAPES externe de mathématiques 2006 à 2008 + Agrégation interne 2008 = 8 problèmes corrigés.